54 Calculer le volume d'un solide

Pour calculer le volume d'un solide, on reconnaît d'abord le solide et on choisit ensuite la formule qui correspond. Pour le Brevet, tu dois connaître ces formules et savoir les appliquer.

RETENIR L'ESSENTIEL

I Volume d'un pavé droit ou d'un cylindre de révolution

- Le volume $\mathcal{V}$ d'un **pavé droit** de dimensions a, b et c est donné par la formule :

$$\boxed{\mathcal{V} = a \times b \times c.}$$

- Le volume $\mathcal{V}$ d'un **cylindre de révolution** de rayon de base r et de hauteur h est donné par la formule :

$$\boxed{\mathcal{V} = \pi r^2 h}$$

Exemple : On veut calculer le volume $\mathcal{V}$ d'un cylindre de rayon de base 3 cm et de hauteur 5 cm.

On a : $\mathcal{V} = \pi \times 3^2 \times 5 = \pi \times 9 \times 5.$

D'où : $\mathcal{V} = 45\pi$ cm³ (valeur exacte).

II Volume d'une pyramide ou d'un cône de révolution

- Le volume $\mathcal{V}$ d'une **pyramide** d'aire de base $\mathcal{A}$ et de hauteur h est donné par la formule :

$$\boxed{\mathcal{V} = \frac{\mathcal{A}h}{3}}$$

- Le volume $\mathcal{V}$ d'un **cône de révolution** de rayon de base r et de hauteur h est donné par la formule :

$$\boxed{\mathcal{V} = \frac{\pi r^2 h}{3}}$$

MOT-CLÉ
La **base** d'une pyramide est un polygone. La base d'un cylindre ou d'un cône est un disque.

Exemple : On veut calculer le volume $\mathcal{V}$ d'un cône de révolution de rayon de base 4 cm et de hauteur 6 cm.

On a : $\mathcal{V} = \dfrac{\pi \times 4^2 \times 6}{3} = \pi \times 16 \times 2.$

D'où : $\mathcal{V} = 32\,\pi$ cm³ (valeur exacte).

III Volume d'une sphère

Le volume $\mathcal{V}$ d'une **sphère** de rayon r est donné par la formule :

$$\boxed{\mathcal{V} = \frac{4}{3}\pi r^3}$$

Exemple : On veut calculer le volume $\mathcal{V}$ d'une sphère de rayon 5 cm.

On a :
$\mathcal{V} = \dfrac{4}{3}\pi \times 5^3$

D'où : $\mathcal{V} = \dfrac{500\pi}{3}$ cm³ (valeur exacte).

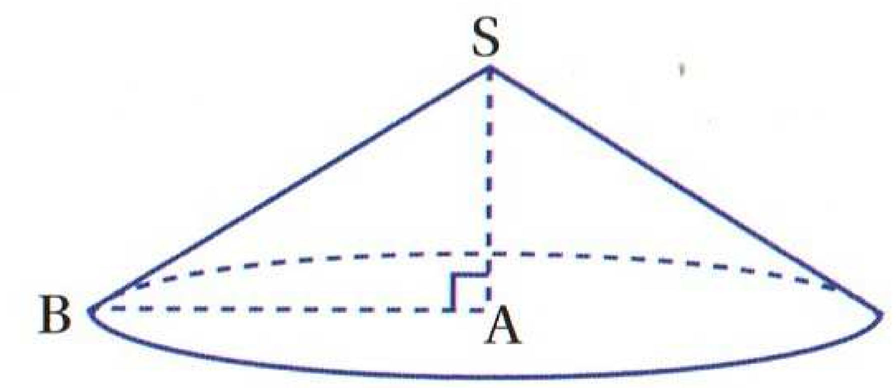
APPLIQUER

I Calculer le volume d'un cône

ABS est un triangle rectangle en A tel que BS = 9,5 cm et AB = 7,6 cm (*la figure n'est pas en vraie grandeur*).

On obtient un cône en faisant tourner le triangle ABS autour de son côté [SA].

MÉTHODE
Applique le théorème de Pythagore au triangle ABS.



1. Calculer SA.

2. Calculer la valeur exacte du volume de ce cône, puis sa valeur arrondie au cm³ près.

Solution

1. On applique le théorème de Pythagore au triangle ABS rectangle en A :
$BS^2 = SA^2 + AB^2$.

Soit : $9{,}5^2 = SA^2 + 7{,}6^2$.

D'où $SA^2 = 90{,}25 - 57{,}76 = 32{,}49$.

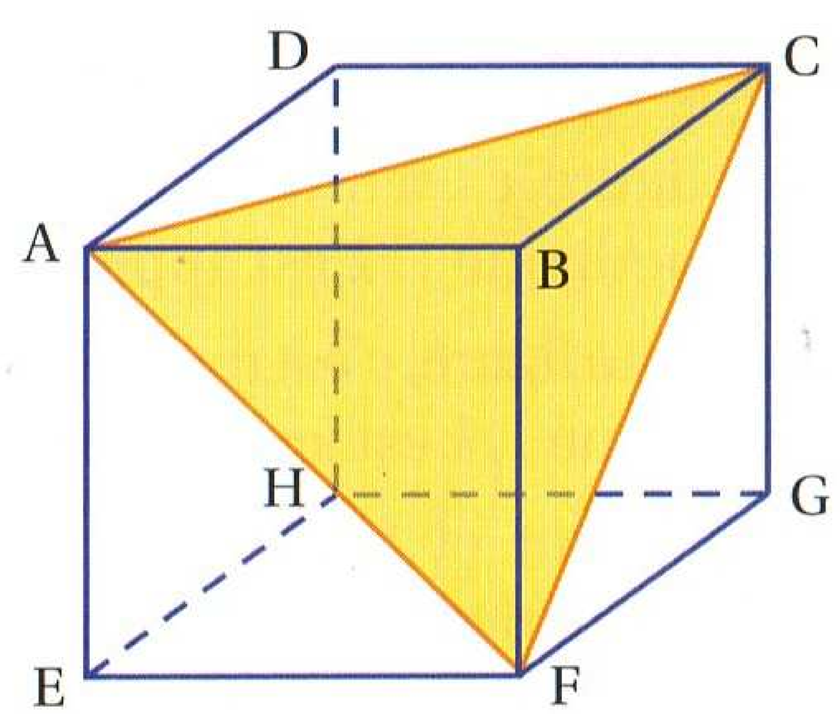
Or $SA > 0$, donc $SA = 5{,}7$ cm.

2. On applique la formule du volume du cône avec r = AB = 7,6 cm et h = SA = 5,7 cm.
On obtient :
$\mathcal{V} = \frac{\pi \times 7{,}6^2 \times 5{,}7}{3} = \frac{\pi \times 329{,}232}{3} = 109{,}744\,\pi\,\text{cm}^3$ (valeur exacte).
Le volume de ce cône arrondi au cm³ près est 345 cm³.

II Calculer le volume d'une pyramide

ABCDEFGH est un cube d'arête 6 cm (*la figure n'est pas en vraie grandeur*). La pyramide ABFC a pour base ABF et pour hauteur le segment [BC]. Calculer son volume.

MÉTHODE
Calcule d'abord l'aire de la base, c'est-à-dire l'aire du triangle rectangle ABF.



Solution

L'aire $\mathcal{A}$ de la base est celle du triangle rectangle ABF. On obtient :
$\mathcal{A} = \frac{AB \times BF}{2} = \frac{6 \times 6}{2} = 18\,\text{cm}^2$.
Le volume $\mathcal{V}$ de la pyramide ABFC est : $\mathcal{V} = \frac{18 \times BC}{3} = \frac{18 \times 6}{3} = 36\ \text{cm}^3$.