

8 Conduire un calcul avec des puissances

Le carré d'un nombre x est le produit de x par lui-même. On dit que le carré de x est une puissance de x d'exposant 2. Les règles de calcul avec des puissances ont été introduites par René Descartes au XVII^e siècle.

RETENIR L'ESSENTIEL

I Puissance d'un nombre

1. Puissance d'exposant positif d'un nombre x

x est un nombre relatif et n est un entier positif supérieur ou égal à 2.

■ La **puissance d'exposant n** de x est le nombre x^n égal au produit de n facteurs tous égaux à x .

■ **Convention** : $x^0 = 1$ et $x^1 = x$.

■ **Cas particuliers** : x^2 désigne le **carré** de x et x^3 désigne le **cube** de x .

Exemples : $8^2 = 8 \times 8 = 64$; $(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = (-8)$.

2. Puissance d'exposant négatif d'un nombre x

x est un nombre relatif non nul et n est un entier positif supérieur ou égal à 2.

La **puissance d'exposant $-n$** de x est le nombre x^{-n} égal à $\frac{1}{x^n}$.

Cas particulier : $x^{-1} = \frac{1}{x}$. C'est l'inverse de x .

Exemples : $7^{-3} = \frac{1}{7^3} = \frac{1}{7 \times 7 \times 7} = \frac{1}{343}$.

3. Puissances de 10

n est un entier positif non nul.

On a : $10^n = \underbrace{10 \times \dots \times 10}_{n \text{ facteurs}} = \underbrace{100 \dots 0}_{n \text{ zéros}}$ et $10^{-n} = \frac{1}{10^n}$.

ATTENTION !

Ne confonds pas le double de x (qui s'écrit $2x$) et son carré (qui s'écrit x^2). Le double de 8 est 16, son carré est 64.

MÉTHODE

x désigne un nombre relatif non nul, x^{-n} est l'inverse de x^n . Tu dois savoir que : $x^{-n} \times x^n = 1$.

II Règles de calcul avec des puissances

1. Multiplier ou diviser deux puissances

■ Pour **multiplier deux puissances** d'un même nombre, on ajoute ses exposants.

Exemple : $(7)^{-2} \times (-7)^5 = (-7)^{-2+5} = (-7)^3$.

■ Pour **diviser deux puissances** d'un même nombre, on soustrait ses exposants.

Exemple : $\frac{8^5}{8^{-2}} = 8^{5-(-2)} = 8^{5+2} = 8^7$.

■ Pour **calculer une puissance d'une puissance** d'un nombre, on multiplie les exposants.

Exemple : $(9^{-2})^6 = 9^{(-2) \times 6} = 9^{-12}$.

2. Appliquer un exposant à un produit ou à un quotient

■ Pour **appliquer un exposant au produit** de deux nombres, on l'applique à chacun des deux nombres.

Exemple : $(2 \times 1,5)^3 = 2^3 \times 1,5^3$.

■ Pour **appliquer un exposant au quotient** de deux nombres, on l'applique à chacun des deux nombres.

Exemple : $\left(\frac{6}{5}\right)^2 = \frac{6^2}{5^2}$.

ATTENTION !

Le signe de l'exposant ne donne pas le signe de la puissance. Si x est positif, x^n et x^{-n} sont positifs. Si x est négatif et n pair, x^n et x^{-n} sont positifs. Si x est négatif et n impair, x^n et x^{-n} sont négatifs.

APPLIQUER Calculer avec des puissances

On considère l'expression suivante : $B = \frac{10^5 \times 30 \times 10^{-2}}{5 \times 10^2}$.

Montrer que B est un entier.

Solution

On regroupe les puissances de 10 d'une part et les nombres restants d'autre part.

On obtient : $B = \frac{10^5 \times 10^{-2}}{10^2} \times \frac{30}{5} = \frac{10^{5-2}}{10^2} \times 6 = \frac{10^3}{10^2} \times 6 = 10^{3-2} \times 6 = 10 \times 6 = 60$.

B est bien un entier.

MÉTHODE

Regroupe ensemble les puissances de 10.