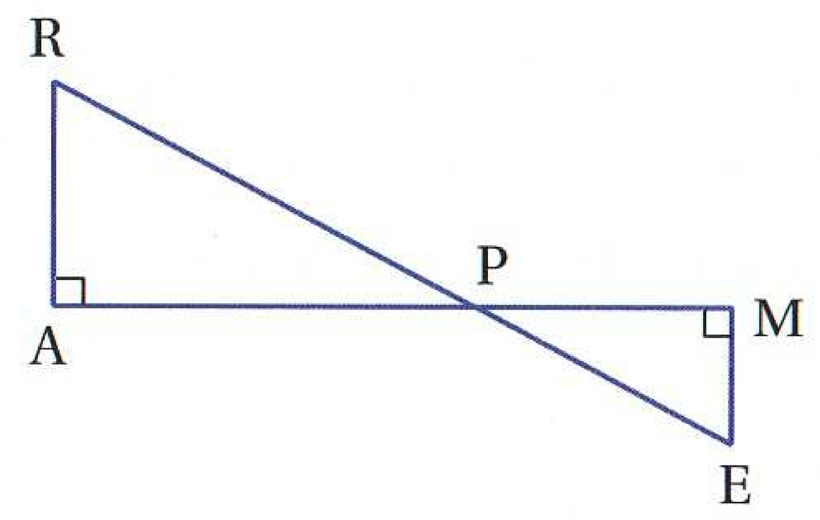
SUJET 70 | Utiliser la trigonométrie pour calculer une longueur

DURÉE 20 MIN

→ **Fiche 44** Utiliser le théorème de Pythagore et sa réciproque
→ **Fiche 45** Calculer une longueur en utilisant la trigonométrie

1. PAR est un triangle rectangle en A. Les points R, P et E sont alignés ainsi que les points A, P et M.



On donne AR = 2 cm et RP = 4 cm (*la figure n'est pas en vraie grandeur*).

Calculer AP et l'exprimer sous la forme $a\sqrt{b}$ où *a* et *b* sont des entiers.

2. Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{RPA}$.

3. Expliquer pourquoi les angles $\widehat{RPA}$ et $\widehat{MPE}$ ont la même mesure.

4. PME est un triangle rectangle en M. On donne ME = 3 cm. Calculer PM à 1 mm près.

DÉMARRONS ENSEMBLE

1. Tu sais que $12 = 4 \times 3$ et que $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.
2. AR est la longueur du côté opposé à l'angle $\widehat{RPA}$.
3. Cherche quelle position particulière occupent les angles $\widehat{RPA}$ et $\widehat{MPE}$.
4. ME est la longueur du côté opposé à l'angle $\widehat{MPE}$ et PM est la longueur du côté adjacent à cet angle.

CORRIGÉ

1. On applique le théorème de Pythagore au triangle PAR rectangle en A.

On a : $PR^2 = AP^2 + AR^2$. Soit : $4^2 = AP^2 + 2^2$. D'où $AP^2 = 16 - 4 = 12$.

Or AP > 0, donc $AP = \sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$.

2. AR est la longueur du côté opposé à l'angle $\widehat{RPA}$ et RP est la longueur de l'hypoténuse, donc $\sin\widehat{RPA} = \frac{AR}{PR} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. À l'aide de la calculatrice, on trouve 30° pour mesure exacte de l'angle $\widehat{RPA}$.

ATTENTION !
L'équation $AP^2 = 12$ admet une solution positive et une solution négative. AP est une longueur, donc on conserve la solution positive.

3. Les angles $\widehat{RPA}$ et $\widehat{MPE}$ sont opposés par le sommet, donc ils ont la même mesure.

4. ME est la longueur du côté opposé à l'angle $\widehat{MPE}$, PM est la longueur du côté adjacent à cet angle et $\tan\widehat{MPE} = \frac{ME}{PM}$. On effectue un produit en croix :

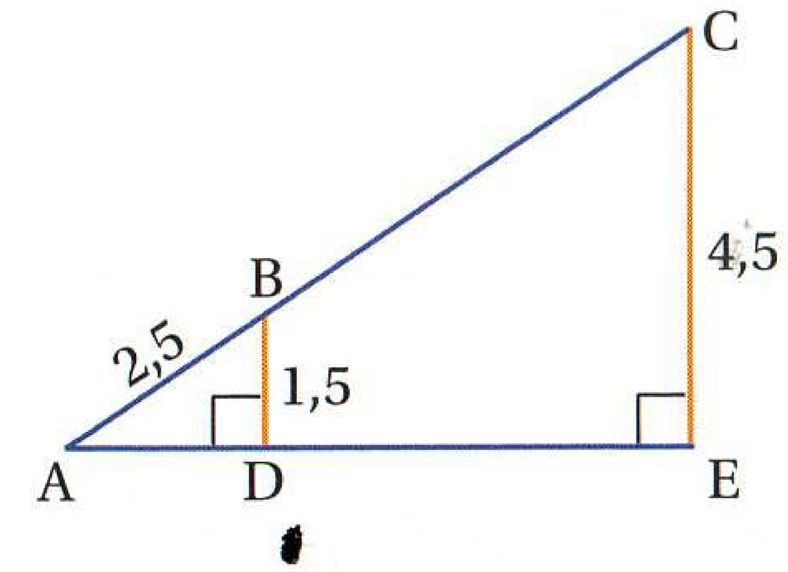
$PM \times \tan\widehat{MPE} = ME$. D'où $PM = \frac{ME}{\tan\widehat{MPE}} = \frac{3}{\tan 30°}$. À l'aide de la calculatrice, on trouve 5,2 cm pour mesure de la longueur PM à 1 mm près.

SUJET 71 | Calculer un sinus dans deux triangles rectangles

DURÉE 15 MIN

→ **Fiche 44** Utiliser le théorème de Pythagore et sa réciproque
→ **Fiche 45** Calculer une longueur en utilisant la trigonométrie

On considère la figure ci-dessous. Les points A, B et C sont alignés ainsi que les points A, D et E.



Les droites (BD) et (CE) sont perpendiculaires à la droite (AE).

De plus, AB = 2,5 ; BD = 1,5 et CE = 4,5. *La figure n'est pas en vraie grandeur.*

1. Calculer AD. Justifier.

2. Déterminer la mesure, arrondie au degré, de l'angle $\widehat{BAD}$. Justifier.

3. Calculer les valeurs exactes de AC et de AE. Justifier.

DÉMARRONS ENSEMBLE

1. Utilise le théorème de Pythagore dans le triangle ABD.
2. Remarque que BD est la longueur du côté opposé à l'angle $\widehat{BAD}$.
3. Les angles $\widehat{BAD}$ et $\widehat{CAE}$ sont égaux. Utilise la trigonométrie dans le triangle ACE.

CORRIGÉ

1. On applique le théorème de Pythagore au triangle ABD rectangle en D :
$AB^2 = AD^2 + BD^2$.
Soit : $2{,}5^2 = AD^2 + 1{,}5^2$.
D'où : $AD^2 = 6{,}25 - 2{,}25 = 4$.
Or AD est une longueur, donc $AD > 0$. On en déduit que $AD = 2$.

2. Les données de l'exercice donnent les longueurs AB et BD du triangle ABD.
On choisit de calculer le sinus de l'angle $\widehat{BAD}$: $\sin\widehat{BAD} = \dfrac{BD}{AB} = \dfrac{1{,}5}{2{,}5} = 0{,}6$.

À l'aide de la calculatrice, on trouve 37° pour mesure arrondie au degré de l'angle $\widehat{BAD}$.

3. Les angles $\widehat{BAD}$ et $\widehat{CAE}$ sont égaux. Donc, dans le triangle ACE : $\sin\widehat{BAD} = \sin\widehat{CAE} = 0{,}6$.

Or $\sin\widehat{CAE} = \dfrac{CE}{AC}$.

On en déduit : $\dfrac{4{,}5}{AC} = 0{,}6$.

D'où : $4{,}5 = 0{,}6 \times AC$.

Donc : $AC = \dfrac{4{,}5}{0{,}6} = 7{,}5$.

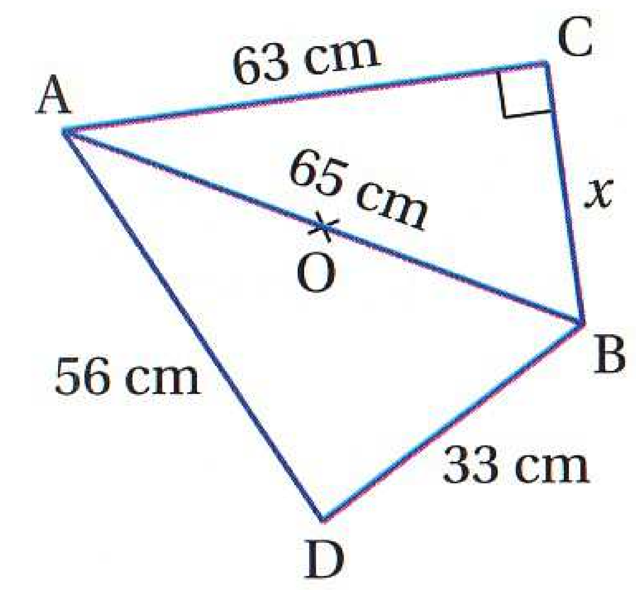
On applique le théorème de Pythagore au triangle ACE rectangle en E pour calculer AE :
$AC^2 = AE^2 + CE^2$.
Soit : $7{,}5^2 = AE^2 + 4{,}5^2$.
D'où : $AE^2 = 56{,}25 - 20{,}25 = 36$.
Or AE est une longueur, donc $AE > 0$. On en déduit : $AE = 6$ (valeur exacte).

> **ATTENTION !**
> Si deux angles sont égaux, alors ils ont le même sinus.

SUJET 72 | Médiane relative à l'hypoténuse

DURÉE 15 MIN

→ **Fiche 43** Utiliser la propriété du cercle circonscrit au triangle rectangle
→ **Fiche 44** Utiliser le théorème de Pythagore et sa réciproque



On considère la figure ci-contre. *Elle n'est pas en vraie grandeur.*

ABC est un triangle rectangle en C tel que $AC = 63$ cm et $AB = 65$ cm.

On pose $BC = x$. Soit D le point tel que $AD = 56$ cm et $BD = 33$ cm.

1. Calculer x.
2. Démontrer que ABD est rectangle. Préciser en quel point.
3. O est le milieu de [AB]. Montrer que $OC = OD$.

DÉMARRONS ENSEMBLE

1. Utilise le théorème de Pythagore dans le triangle ACB.
2. Calcule les carrés des longueurs des trois côtés du triangle ABD.
3. Trouve d'abord une médiane du triangle rectangle ABD.

CORRIGÉ

1. On applique le théorème de Pythagore au triangle ACB rectangle en C :
$AB^2 = AC^2 + BC^2$. Soit : $65^2 = 63^2 + x^2$. D'où : $x^2 = 4\,225 - 3\,969 = 256$.
Or x est une longueur, donc $x > 0$. On en déduit : $x = \sqrt{256} = 16$.

2. On applique la réciproque du théorème de Pythagore au triangle ABD. Pour cela, on calcule les carrés des longueurs des trois côtés :
$AD^2 = 56^2 = 3\,136$; $BD^2 = 33^2 = 1\,089$; $AB^2 = 65^2 = 4\,225$.
On additionne les deux plus petits carrés :
$AD^2 + BD^2 = 3\,136 + 1\,089 = 4\,225$. Donc $AD^2 + BD^2 = AB^2$.
Le triangle ABD est rectangle en D.

3. [OD] est la médiane relative à l'hypoténuse dans le triangle rectangle ABD, donc $OD = \dfrac{1}{2}AB$. De même, [OC] est la médiane relative à l'hypoténuse dans le triangle rectangle ABC, donc $OC = \dfrac{1}{2}AB$. On en déduit que $OD = OC$.

> **ATTENTION !**
> Donne avec précision le nom de la médiane et du triangle rectangle utilisé.

SUJET 73 | Tangente d'un angle

DURÉE 20 MIN

→ **Fiche 40** Calculer la mesure d'un angle inscrit ou d'un angle au centre
→ **Fiche 45** Calculer une longueur en utilisant la trigonométrie

1. Construire un triangle ABC rectangle en C tel que AC = 5 cm et $\widehat{BAC} = 40°$.

2. Calculer la longueur BC (on donnera une valeur arrondie au millimètre).

3. a. Où se trouve le centre O du cercle circonscrit au triangle ABC ? Justifier.

b. Tracer ce cercle.

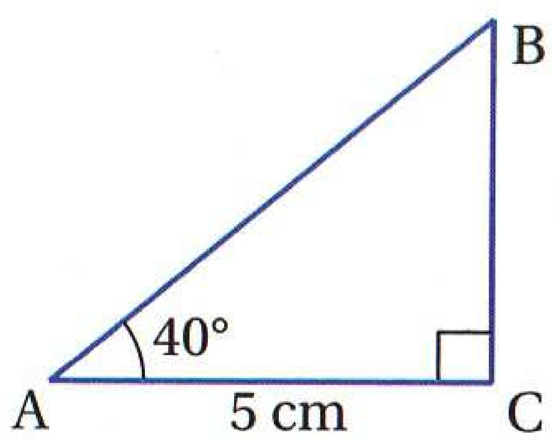
4. En déduire la mesure de l'angle $\widehat{BOC}$.

DÉMARRONS ENSEMBLE

1. Trace d'abord le segment [AC].
2. Observe que [BC] est le côté opposé à l'angle $\widehat{BAC}$.
3. Le triangle ABC est rectangle en C. Cherche son hypoténuse.
4. Cherche un angle inscrit et un angle au centre qui interceptent l'arc $\overset{\frown}{BC}$.

CORRIGÉ

1. Pour tracer le triangle ABC rectangle en C, on trace le segment [AC] de longueur 5 cm, puis l'angle de sommet A et de mesure 40°. On termine en traçant l'angle droit de sommet C (*la figure n'est pas en vraie grandeur*).



2. Dans le triangle ABC rectangle en C, AC est la longueur du côté adjacent à l'angle $\widehat{BAC}$ et BC est celle du côté opposé à cet angle. On a : $\tan\widehat{BAC} = \frac{BC}{AC}$.
On effectue un produit en croix et on obtient $BC = AC \times \tan\widehat{BAC}$, d'où $BC = 5 \times \tan 40°$.

À l'aide de la calculatrice, on trouve 4,2 cm pour mesure de la longueur BC à 1 mm près.

3. a. Le triangle ABC est rectangle en C, donc le centre O du cercle circonscrit au triangle ABC se trouve au milieu de l'hypoténuse [AB].

4. L'angle inscrit $\widehat{BAC}$ et l'angle au centre $\widehat{BOC}$ interceptent le même arc $\overset{\frown}{BC}$.
Donc $\widehat{BOC} = 2 \times \widehat{BAC}$.
L'angle $\widehat{BOC}$ a pour mesure $2 \times 40 = 80°$.

SUJET 74 | Expérimenter, puis démontrer

DURÉE 25 MIN

→ **Fiche 44** Utiliser le théorème de Pythagore et sa réciproque
→ **Fiche 46** Calculer un angle en utilisant la trigonométrie

Soit ABC le triangle rectangle en B, tel que AB = 2 cm et AC = 4 cm.

1. Construire le triangle ABC en respectant les dimensions.

2. En utilisant la règle et le rapporteur, donner la mesure de [BC] arrondie à 0,1 cm et les mesures, en degrés, de $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BCA}$.

3. On se propose de calculer la mesure, en centimètres, de [BC] en répondant aux questions suivantes.

a. Quel théorème faut-il utiliser ?

b. Écrire ce théorème en utilisant le triangle donné.

c. Calculer la mesure arrondie à 0,1 cm de BC.

d. Cette valeur calculée est-elle conforme à la valeur mesurée à la question **2** ?

4. On se propose de calculer la mesure de $\widehat{BAC}$ en répondant aux questions suivantes.

a. Écrire la relation entre $\cos\widehat{BAC}$ et les côtés du triangle ABC.

b. Calculer $\cos\widehat{BAC}$ puis en déduire la mesure, en degrés, de $\widehat{BAC}$.

c. Cette valeur calculée est-elle conforme à la valeur mesurée à la question **2** ?

5. On se propose de calculer la mesure de $\widehat{BCA}$ en répondant aux questions suivantes.

a. Écrire la relation entre $\sin\widehat{BCA}$ et les côtés du triangle ABC.

b. Calculer $\sin\widehat{BCA}$ puis en déduire la mesure, en degrés, de $\widehat{BCA}$.

c. Cette valeur calculée est-elle conforme à la valeur mesurée à la question **2** ?

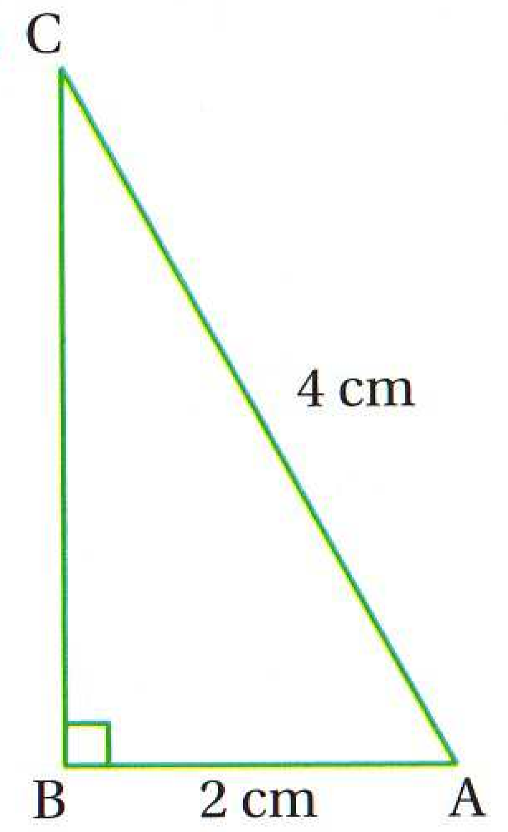
6. Calculer la somme des mesures des angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BCA}$. Ce résultat est-il conforme à la propriété de la somme des angles d'un triangle ?

DÉMARRONS ENSEMBLE

2. Les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BCA}$ sont aigus, donc leur mesure est comprise entre 0° et 90°.
3. Tu connais la mesure de deux côtés d'un triangle rectangle.
4. Cherche le côté adjacent à l'angle $\widehat{BAC}$.
5. Cherche le côté opposé à l'angle $\widehat{BCA}$.
6. Ajoute la mesure du troisième angle du triangle ABC.

CORRIGÉ

1.



2. En utilisant la règle et le rapporteur, on trouve :
BC vaut environ 3,5 cm, $\widehat{BAC}$ vaut 60° et $\widehat{BCA}$ vaut 30°.

3. a. On utilise le théorème de Pythagore dans le triangle ABC rectangle en B.

b. On a, d'après le théorème de Pythagore : $AC^2 = AB^2 + BC^2$.

c. On en déduit : $4^2 = 2^2 + BC^2$. D'où : $BC^2 = 16 - 4 = 12$.

Or BC est une longueur, donc BC > 0. On en déduit que BC = $\sqrt{12}$. La valeur arrondie de BC à 0,1 cm est 3,5 cm.

d. Cette valeur est conforme à la valeur mesurée à la question **2**.

4. a. On a : $\cos \widehat{BAC} = \dfrac{AB}{AC}$.

b. On en déduit : $\cos \widehat{BAC} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$. À l'aide de la calculatrice, on trouve : $\widehat{BAC} = 60°$.

c. Cette valeur est conforme à la valeur mesurée à la question **2**.

5. a. On a : $\sin \widehat{BCA} = \dfrac{AB}{AC}$.

b. On en déduit : $\sin \widehat{BCA} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$. À l'aide de la calculatrice, on trouve : $\widehat{BCA} = 30°$.

c. Cette valeur est conforme à la valeur mesurée à la question **2**.

6. On a : $\widehat{BAC} + \widehat{BCA} = 60 + 30 = 90°$. Or l'angle $\widehat{ABC}$ est un angle droit, donc $\widehat{ABC} = 90°$. La somme des angles du triangle ABC est égale à 180°. Ce résultat est conforme à la propriété de la somme des angles d'un triangle.

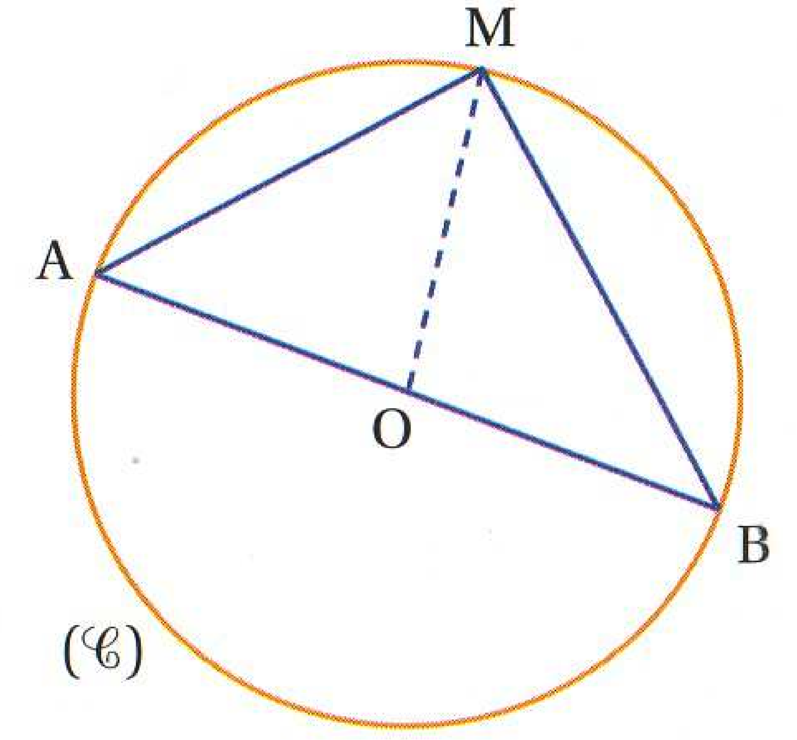
SUJET 75 | Calculer la mesure d'un angle au centre

DURÉE 10 MIN

→ **Fiche 40** Calculer la mesure d'un angle inscrit ou d'un angle au centre
→ **Fiche 46** Calculer un angle en utilisant la trigonométrie

La figure ci-dessous n'est pas en vraie grandeur.

($\mathscr{C}$) est un cercle de centre O et de diamètre [AB] tel que AB = 6 cm. M est un point du cercle tel que BM = 4,8 cm.



Calculer la mesure de l'angle $\widehat{AOM}$, arrondie au degré.

Si le travail n'est pas terminé, laisser tout de même une trace de la recherche. Elle sera prise en compte dans la notation.

DÉMARRONS ENSEMBLE

Attention ! Ici, tu n'es pas guidé : tu dois trouver par toi-même les **étapes de la solution**.

Tu ne peux pas calculer directement la mesure de l'angle $\widehat{AOM}$. Tu dois d'abord démontrer que le triangle ABM est rectangle en M, puis calculer la mesure de l'angle $\widehat{ABM}$ arrondie au degré.

- Observe que [AB] est un diamètre.
- Tu connais la longueur de l'hypoténuse et celle du côté adjacent à l'angle $\widehat{ABM}$.
- L'angle $\widehat{ABM}$ est un angle inscrit. Cherche l'angle au centre qui lui est associé.

CORRIGÉ

[AB] est un diamètre et M est un point du cercle, donc le triangle ABM est rectangle en M.
AB est la longueur de l'hypoténuse et BM est la longueur du côté adjacent à l'angle $\widehat{ABM}$.
Donc : $\cos \widehat{ABM} = \frac{BM}{AB} = \frac{4{,}8}{6} = 0{,}8$.
À l'aide de la calculatrice, on trouve 37° pour mesure de l'angle $\widehat{ABM}$ arrondie au degré.

L'angle inscrit $\widehat{ABM}$ et l'angle au centre $\widehat{AOM}$ interceptent le même arc $\overset{\frown}{AM}$. Donc $\widehat{AOM} = 2 \times \widehat{ABM}$. L'angle $\widehat{AOM}$ a pour mesure $2 \times 37 = 74°$, valeur arrondie au degré.

MÉTHODE
Pour calculer la mesure d'un angle dessiné dans un cercle, il faut penser au théorème de l'angle inscrit.