SUJET 24 | Développer avec les identités remarquables

DURÉE 15 MIN

→ Fiche 14 Développer et réduire à l'aide des identités remarquables
→ Fiche 16 Calculer la valeur d'une expression pour un nombre donné

Soit $A=\frac{1}{4}\left[(a+b)^2-(a-b)^2\right]$.

1. Calculer A pour $a = 1$ et $b = 5$.

2. Calculer A pour $a = -2$ et $b = -3$.

3. Alex affirme que le nombre A est égal au produit des nombres a et b. A-t-il raison ? Justifier.

DÉMARRONS ENSEMBLE

1. Remplace a par 1 et b par 5 dans l'expression de A. Calcule la somme et la différence en premier.
2. Souviens-toi que le carré d'un nombre négatif est positif.
3. Commence par développer et réduire l'expression entre crochets.

CORRIGÉ

1. On calcule A en remplaçant a par 1 et b par 5 :

$$A=\frac{1}{4}\left[(1+5)^2-(1-5)^2\right]=\frac{1}{4}\left[6^2-(-4)^2\right]=\frac{1}{4}(36-16)=\frac{1}{4}\times 20.\quad \text{Donc } A=5.$$

2. On calcule A en remplaçant a par -2 et b par -3 :

$$A=\frac{1}{4}\left[(-2-3)^2-(-2-(-3))^2\right]=\frac{1}{4}\left[(-5)^2-(1)^2\right]=\frac{1}{4}(25-1)=\frac{1}{4}\times 24.\quad \text{Donc } A=6.$$

3. On développe et on réduit l'expression A :

$$A=\frac{1}{4}\left[(a+b)^2-(a-b)^2\right]=\frac{1}{4}\left[\left(a^2+2ab+b^2\right)-\left(a^2-2ab+b^2\right)\right]$$

$$A=\frac{1}{4}(a^2+2ab+b^2-a^2+2ab-b^2)=\frac{1}{4}\times 4ab.\quad \text{Donc } A=ab.$$

Alex a donc raison d'affirmer que le nombre A est égal au produit des nombres a et b.

ATTENTION ! Un exemple ne permet pas d'affirmer qu'une égalité est vraie.

SUJET 25 | Utiliser les identités remarquables pour calculer

DURÉE 10 MIN

→ Fiche 14 Développer et réduire à l'aide des identités remarquables

Les deux questions suivantes sont indépendantes l'une de l'autre.

1. Développer $(x-1)^2$. Justifier que $99^2 = 9\,801$ en utilisant le développement précédent.

2. Développer $(x-1)(x+1)$. Justifier que $99 \times 101 = 9\,999$.

DÉMARRONS ENSEMBLE

1. Observe que $99 = 100 - 1$.
2. Écris 99×101 sous la forme $(x-1)(x+1)$.

CORRIGÉ

1. On développe $(x-1)^2$. On obtient $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$.

On a : $99^2 = (100-1)^2$. Donc :

$99^2 = 100^2 - 2 \times 100 + 1 = 10\,000 - 200 + 1 = 9\,801$.

2. On développe $(x-1)(x+1)$. On obtient : $(x-1)(x+1) = x^2 - 1$.

On a : $99 \times 101 = (100-1)(100+1) = 100^2 - 1 = 9\,999$.

MÉTHODE Pense à utiliser le résultat que tu viens de démontrer pour traiter les questions qui suivent.

SUJET 26 | Des identités remarquables et des racines carrées

DURÉE 10 MIN

→ Fiche 12 Conduire un calcul avec des racines carrées
→ Fiche 14 Développer et réduire à l'aide des identités remarquables
→ Fiche 44 Utiliser le théorème de Pythagore et sa réciproque

On donne : $E=\left(\sqrt{7}+1\right)^2+\left(\sqrt{7}-1\right)^2$.

1. Après avoir développé les carrés, montrer que E est un nombre entier.

2. En déduire la nature d'un triangle dont les côtés mesurent respectivement, en centimètres, $\sqrt{7}+1$, $\sqrt{7}-1$ et 4. Justifier la réponse.

DÉMARRONS ENSEMBLE

1. Un nombre entier est un nombre qui peut s'écrire sans virgule.
2. Utilise la réciproque du théorème de Pythagore. → Fiche 44

CORRIGÉ

1. On développe E. On a :

$$E=\left(\left(\sqrt{7}\right)^2+2\sqrt{7}+1\right)+\left(\left(\sqrt{7}\right)^2-2\sqrt{7}+1\right)$$

$$E=7+2\sqrt{7}+1+7-2\sqrt{7}+1$$

$$E=16.$$

E est donc bien un nombre entier.

2. On a démontré à la question précédente que $\left(\sqrt{7}+1\right)^2+\left(\sqrt{7}-1\right)^2=16$ ou encore :

$\left(\sqrt{7}+1\right)^2+\left(\sqrt{7}-1\right)^2=4^2$.

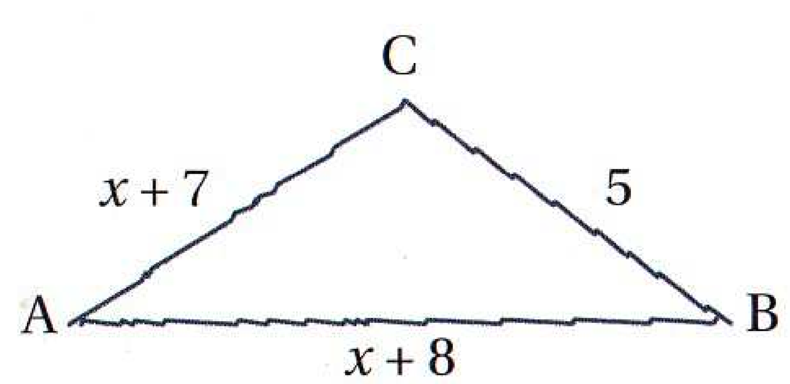
La réciproque du théorème de Pythagore permet d'affirmer que le triangle dont les côtés mesurent respectivement, en centimètres, $\sqrt{7}+1$, $\sqrt{7}-1$ et 4 est un triangle rectangle.

MÉTHODE
Pense à utiliser le résultat démontré à la question 1 pour traiter la suite de l'exercice.

SUJET 27 | Des identités remarquables en géométrie

DURÉE 20 MIN

→ **Fiche 14** Développer et réduire à l'aide des identités remarquables
→ **Fiche 44** Utiliser le théorème de Pythagore et sa réciproque



Soit x un nombre positif compris entre 0 et 10.
Les longueurs sont exprimées en centimètres (cm) et les aires en centimètres carrés (cm²).

La figure ci-contre est dessinée à main levée.
Il s'agit de savoir s'il existe une valeur de x pour laquelle ABC est un triangle rectangle.

1. Calculer AB et AC lorsque $x = 4$.
Lorsque $x = 4$, ABC est-il un triangle rectangle ? Justifier la réponse.

2. Développer et réduire $(x+7)^2$ et $(x+8)^2$.
En déduire : $AB^2 - AC^2 = 2x + 15$.

Quelle est la valeur de $AB^2 - AC^2$ lorsque $x = 0$? Lorsque $x = 10$? La valeur de BC^2 dépend-elle du nombre x ?

3. Déterminer la valeur de x pour laquelle le triangle ABC est rectangle en C.

DÉMARRONS ENSEMBLE

1. Utilise la contraposée du théorème de Pythagore. → **Fiche 44**
2. N'oublie pas le double produit quand tu développes.
3. Applique le théorème de Pythagore au triangle ABC rectangle en C en prenant AB pour hypoténuse.

CORRIGÉ

1. On calcule AB et AC lorsque $x = 4$:
$AB = 4 + 8 = 12$ et $AC = 4 + 7 = 11$.

On calcule les carrés des longueurs des trois côtés :
$AB^2 = 12^2 = 144$; $AC^2 = 11^2 = 121$; $BC^2 = 5^2 = 25$.

On remarque que $AC^2 + BC^2 = 121 + 25 = 146$ et $AB^2 = 144$. D'après la contraposée du théorème de Pythagore, lorsque $x = 4$, ABC n'est pas un triangle rectangle.

2. On développe et on réduit $(x+7)^2$:
$(x+7)^2 = x^2 + 14x + 49$.

On développe et on réduit $(x+8)^2$:
$(x+8)^2 = x^2 + 16x + 64$.

On en déduit : $AB^2 - AC^2 = (x^2 + 16x + 64) - (x^2 + 14x + 49) = 2x + 15$.

Lorsque $x = 0$, on a $AB^2 - AC^2 = 2(0) + 15 = 15$.

Lorsque $x = 10$, on a $AB^2 - AC^2 = 2(10) + 15 = 35$.

La valeur de BC^2 ne dépend pas du nombre x. On a $BC^2 = 5^2 = 25$ quelle que soit la valeur de x.

ATTENTION !
On dit aussi que BC^2 est constant.

3. ABC est un triangle rectangle en C si $AC^2 + BC^2 = AB^2$ ou encore si : $AB^2 - AC^2 = BC^2$.

D'après la question précédente, on a : $AB^2 - AC^2 = 2x + 15$ et $BC^2 = 25$.

On doit donc résoudre l'équation : $2x + 15 = 25$.

Soit : $2x = 25 - 15$
$2x = 10$
$x = 5$.

Le triangle ABC est rectangle en C pour $x = 5$.

On vérifie. Pour $x = 5$, on a : $AB = 13$, $AC = 12$ et $BC = 5$.

Donc : $AC^2 + BC^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169$ et $AB^2 = 13^2 = 169$.

SUJET 28 | Connaître les identités remarquables

DURÉE 10 MIN

→ **Fiche 14** Développer et réduire à l'aide des identités remarquables
→ **Fiche 15** Factoriser à l'aide des identités remarquables

Compléter pour que les égalités soient vraies pour toutes les valeurs de x.

1. $(x + \ldots)^2 = \ldots + 6x + \ldots$

2. $(\ldots - \ldots)^2 = 4x^2 - \ldots + 25$.

3. $\ldots - 64 = (7x - \ldots)(\ldots + \ldots)$.

DÉMARRONS ENSEMBLE

1. Observe que $6x = 2 \times 3 \times x$. C'est le double produit.
2. $4x^2$ est le carré de $2x$. Trouve un autre carré.
3. Observe le premier nombre dans les premières parenthèses.

CORRIGÉ

1. On a : $6x = 2 \times 3 \times x$. C'est le double produit de 3 par x, donc le nombre manquant dans les premières parenthèses est 3. On obtient en développant :

$(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$.

2. $4x^2$ est le carré de $2x$ et 25 est celui de 5. On obtient les deux nombres manquants dans les parenthèses. En développant, on a :

$(2x - 5)^2 = 4x^2 - 20x + 25$.

3. 64 est le carré de 8. C'est le nombre figurant en deuxième position dans chacune des parenthèses. On obtient :

$\ldots - 64 = (7x - 8)(\ldots + 8)$.

On reconnaît l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. On en déduit :

$49x^2 - 64 = (7x - 8)(7x + 8)$.

ATTENTION !
Il faut diviser par 2 le double produit pour faire apparaître le produit des deux nombres.

SUJET 29 | Développer, puis factoriser une expression

DURÉE 15 MIN

→ **Fiche 14** Développer et réduire à l'aide des identités remarquables
→ **Fiche 15** Factoriser à l'aide des identités remarquables

On pose : $D = (12x + 3)(2x - 7) - (2x - 7)^2$.

1. Développer et réduire D.

2. Factoriser D.

3. Calculer D pour $x = 2$ puis pour $x = -1$.

DÉMARRONS ENSEMBLE

1. N'oublie pas le double produit quand tu développes $(2x - 7)^2$.
2. Tu sais que $(2x - 7)^2 = (2x - 7)(2x - 7)$.
3. Utilise l'expression développée pour $x = 2$ et l'expression factorisée pour $x = -1$.

CORRIGÉ

1. On développe et on réduit D :
$D = (24x^2 - 84x + 6x - 21) - (4x^2 - 28x + 49)$
$D = 24x^2 - 84x + 6x - 21 - 4x^2 + 28x - 49$
$D = 20x^2 - 50x - 70$.

2. On factorise D :
$D = (12x + 3)(2x - 7) - (2x - 7)(2x - 7)$
$D = (2x - 7)[(12x + 3) - (2x - 7)]$
$D = (2x - 7)(12x + 3 - 2x + 7)$
$D = (2x - 7)(10x + 10)$.

3. On calcule D pour $x = 2$ avec l'expression développée :
$D = 20 \times 2^2 - 50 \times 2 - 70 = 80 - 100 - 70$.
Donc $D = -90$.

On calcule D pour $x = -1$ avec l'expression factorisée :
$D = (2(-1) - 7)(10(-1) + 10) = (-2 - 7)(-10 + 10)$.
Donc $D = 0$.

ATTENTION !
Un produit est nul si l'un des facteurs est nul.

SUJET 30 | Calculer une différence de deux carrés

DURÉE 10 MIN

→ Fiche 15 Factoriser à l'aide des identités remarquables

Comment peut-on calculer astucieusement sans calculatrice : $1\,999^2 - 1\,998^2$?
Expliquer rigoureusement la démarche et donner la réponse.

DÉMARRONS ENSEMBLE

Factorise la différence $1\,999^2 - 1\,998^2$ en utilisant une des trois identités remarquables.

CORRIGÉ

On factorise la différence $1\,999^2 - 1\,998^2$ à l'aide de l'identité remarquable :
$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

On obtient :

$1\,999^2 - 1\,998^2 = (1\,999 - 1\,998)(1\,999 + 1\,998)$
$= 1 \times 3\,997 = 3\,997$.

MÉTHODE
L'une des identités remarquables permet de calculer plus simplement la différence de deux carrés.

SUJET 31 | Reconnaître l'égalité de deux expressions

DURÉE 10 MIN

→ Fiche 14 Développer et réduire à l'aide des identités remarquables
→ Fiche 16 Calculer la valeur d'une expression pour un nombre donné

On donne $A = (x-5)^2$ et $B = x^2 - 10x + 25$.

1. Calculer A et B pour $x = 5$.

2. Calculer A et B pour $x = -1$.

3. Peut-on affirmer que $A = B$ quelle que soit la valeur de x ? Justifier.

DÉMARRONS ENSEMBLE

1. et **2.** Pense à respecter les règles de priorité de calcul. → **Fiche 7**
3. Développe A et compare l'expression obtenue avec B.

CORRIGÉ

1. On calcule A et B pour $x = 5$.
On a : $A = (5-5)^2 = 0$ et $B = 5^2 - 10 \times 5 + 25 = 25 - 50 + 25 = 0$.

2. On calcule A et B pour $x = -1$.
On a : $A = (-1-5)^2 = (-6)^2 = 36$ et
$B = (-1)^2 - 10(-1) + 25 = 1 + 10 + 25 = 36$.

3. On développe A :
$A = x^2 - 2 \times x \times 5 + 5^2 = x^2 - 10x + 25$.
On en déduit que $A = B$ quelle que soit la valeur de x.

MÉTHODE
N'oublie pas que le calcul des puissances est prioritaire sur les autres opérations.

SUJET 32 | Choisir la bonne expression

DURÉE 15 MIN

→ Fiche 14 Développer et réduire à l'aide des identités remarquables
→ Fiche 15 Factoriser à l'aide des identités remarquables
→ Fiche 16 Calculer la valeur d'une expression pour un nombre donné

On donne l'expression $E = (x-5)^2 + (x-5)(2x+1)$.

1. Pour calculer la valeur exacte de E lorsque $x = \sqrt{3}$, Marc a choisi de développer E.

a. Quelle expression obtient-il ?

b. Calculer la valeur exacte de E lorsque $x = \sqrt{3}$.

c. Marc a-t-il eu raison de développer E ? Pourquoi ?

2. Lorsque $x = 5$, choisir la forme de E qui paraît la plus adaptée pour calculer la valeur exacte de E. Faire ce calcul.

DÉMARRONS ENSEMBLE

1. a. Tu sais que : $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
b. Souviens-toi que : $\left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$.
2. Observe l'expression donnée au début de l'exercice.

CORRIGÉ

1. a. On développe E :
$E = x^2 - 10x + 25 + 2x^2 + x - 10x - 5 = 3x^2 - 19x + 20$.

b. On calcule la valeur exacte de E lorsque $x = \sqrt{3}$:
$E = 3(\sqrt{3})^2 - 19\sqrt{3} + 20 = 3 \times 3 - 19\sqrt{3} + 20 = 29 - 19\sqrt{3}$.

c. Marc a eu raison de développer E. Le développement permet de faire moins de calculs pour obtenir le même résultat.

2. Lorsque $x = 5$, on choisit la forme de départ. On a :
$E = (5-5)^2 + (5-5)(2 \times 5 + 1) = 0 + 0 \times 11$.
Donc $E = 0$.

MÉTHODE
Si x est la racine carrée d'un nombre, utilise la forme développée de l'expression pour la calculer.

SUJET 33 | Développer avec les identités remarquables

DURÉE 15 MIN

→ **Fiche 12** Conduire un calcul avec des racines carrées
→ **Fiche 14** Développer et réduire à l'aide des identités remarquables

On considère un carré ABCD de côté $1+\sqrt{3}$ et un rectangle EFGH de largeur EF = 1 et de longueur FG indéterminée. On veut que les aires des deux quadrilatères ABCD et EFGH soient égales.

Montrer que la valeur exacte de FG est alors de la forme $a+b\sqrt{3}$ où a et b sont des entiers.

Si le travail n'est pas terminé, laisser tout de même une trace de la recherche. Elle sera prise en compte dans la notation.

DÉMARRONS ENSEMBLE

Attention ! Ici, tu n'es pas guidé : tu dois trouver par toi-même les **étapes de la solution**.

- Calcule d'abord l'aire des deux quadrilatères.
- Puis écris une équation.

CORRIGÉ

L'aire du rectangle EFGH est égale à $1 \times \text{FG}$.
L'aire du carré ABCD est égal à $\left(1+\sqrt{3}\right)^2$.

On veut que les aires des deux quadrilatères ABCD et EFGH soient égales.

On résout l'équation : $\left(1+\sqrt{3}\right)^2 = 1 \times \text{FG}$.

On développe à l'aide des identités remarquables et on obtient :
$\text{FG} = 1 + 2\sqrt{3} + \left(\sqrt{3}\right)^2 = 1 + 2\sqrt{3} + 3 = 4 + 2\sqrt{3}$.

La valeur exacte de FG doit donc être $4 + 2\sqrt{3}$.

MÉTHODE
N'oublie pas les parenthèses qui sont indispensables lorsque l'on veut écrire une somme au carré.