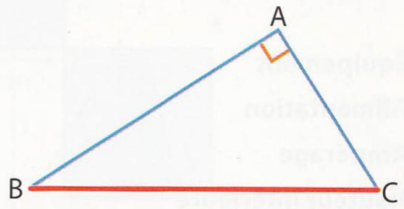
Pythagore : Calcul de l'hypoténuse et réciproque

I. Hypoténuse d'un triangle rectangle

Définition et propriété :

Dans un triangle rectangle, le côté opposé à l'angle droit est le plus grand des trois côtés. On l'appelle l'hypoténuse du triangle.

ABC est un triangle rectangle en A.
Le plus grand côté du triangle ABC est le côté [BC].
On dit que [BC] est l'hypoténuse du triangle ABC.

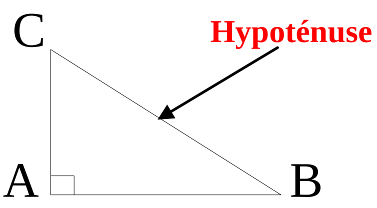


Le mot « hypoténuse » vient du grec *hypo* (sous) et *teinô* (tendre) : c'est le côté qui « sous-tend » l'angle droit.

II. Propriété du triangle rectangle (admise)

1) Théorème de Pythagore

Si un triangle est rectangle alors le carré de la longueur de son hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs de ses deux autres côtés.



Le triangle ABC est rectangle en A.
L'hypoténuse est [BC] donc on a l'égalité :

$BC^2 = AB^2 + AC^2$

Vocabulaire :

Dans le triangle ABC, rectangle en A l'égalité $BC^2 = AB^2 + AC^2$ s'appelle **l'égalité de Pythagore.**

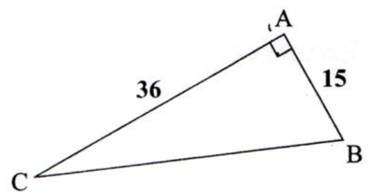
Remarque :

Dans un triangle rectangle, l'égalité de Pythagore permet de calculer la longueur d'un côté connaissant les longueurs des deux autres côtés.

2) Applications : Calculer l'hypoténuse d'un triangle rectangle

a) Calculer l'hypoténuse d'un triangle rectangle

On donne ci-contre le triangle BAC rectangle en A tel que AB = 15 cm et AC = 36 cm .
Calculer BC.



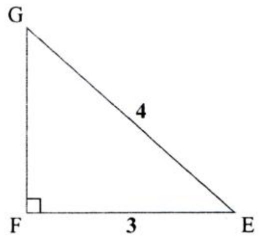
Le triangle ABC est rectangle en A. Donc d'après le théorème de Pythagore :
$BC^2 = AB^2 + AC^2$
$BC^2 = 15^2 + 36^2 = 225 + 1296 = 1521$

On utilise la touche $\sqrt{\ }$ de la calculatrice pour trouver BC.

BC = $\sqrt{1521}$ cm = 39 cm.

b) Calculer un des côtés de l'angle droit

On donne ci-contre le triangle EFG rectangle en F tel que EF = 3 cm et EG = 4 cm .
Calculer FG (donner la valeur exacte puis un arrondi au mm.)



1re étape ▶ On sait que le triangle est rectangle, donc on peut utiliser le théorème de Pythagore.

On a $EG^2 = EF^2 + FG^2$.
Donc $4^2 = 3^2 + FG^2$. D'où $16 = 9 + FG^2$.
On obtient $FG^2 = 16 - 9 = 7$. Donc $FG = \sqrt{7}$ cm .

2e étape ▶ On utilise la touche $\sqrt{\ }$ de la calculatrice pour trouver l'arrondi demandé.

La calculatrice affiche 2.645751311 pour $\sqrt{7}$. Donc $FG \approx 2,6$ cm .

III. Démontrer qu'un triangle est rectangle ou non

1. Prouver qu'un triangle est rectangle

Réciproque du théorème de Pythagore

Si le carré de la longueur du plus grand côté d'un triangle est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés, alors ce triangle est rectangle.

Exemples :

Soit ABC un triangle tel que : AB = 2,4cm, AC = 3,2cm et BC = 4cm.

Montrer que le triangle ABC est rectangle en A.
Le côté le plus long est [BC].

$BC^2 = 4^2 = 16$

$AB^2 + AC^2 = 2{,}4^2 + 3{,}2^2 = 5{,}76 + 10{,}24 = 16$

donc $BC^2 = AB^2 + AC^2$

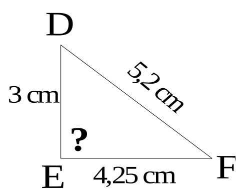
On a l'égalité de Pythagore, donc le triangle est rectangle en A.

2. Prouver qu'un triangle n'est pas rectangle

Si le carré de la longueur du plus grand côté d'un triangle n'est pas égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés, alors ce triangle n'est pas rectangle.

Exemples :

Soit DEF un triangle tel que : DE = 3 cm, EF = 4,25 cm et DF = 5,2 cm.
Le triangle DEF est-il rectangle ?



Le côté le plus long est [DF].

$DF^2 = 5{,}2^2 = 27{,}04$

$DE^2 + EF^2 = 3^2 + 4{,}25^2 = 9 + 18{,}0625 = 27{,}0625$

donc $DF^2 \neq DE^2 + EF^2$

On n'a pas l'égalité de Pythagore, donc le triangle n'est pas rectangle.