Arithmétique $3^{ème}$

Dans tout ce cours les nombres considérés sont des nombres entiers positifs appelés entiers naturels

I. Recherche des diviseurs d'un nombre

Déterminer tous les diviseurs de 56, 60, 250

56 : 1 ; 2 ; 4 ; 7 ; 8 ; 14 ; 28 ; 56
60 : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 10 ;12 ; 15 ; 20 ; 30 ; 60
250 : 1 ; 2 ; 5 ; 10 ; 25 ; 50 ; 125 ; 250

II. Nombres premiers

1) Définition

Un nombre premier est un entier naturel qui admet exactement deux diviseurs distincts, 1 et lui-même.

Exemples :

6 n'est pas premier, il est divisible par 1; 2 , 3 et 6.

7 est premier, il n'est divisible que par 1 et 7.

2) Remarques

Le nombre 1 n'est pas premier car il n'a qu'un seul diviseur, lui-même.

Le nombre 0 n'est pas premier car il admet une infinité de diviseurs.

Le nombre 2 est le seul nombre premier pair car tous les nombres pairs sont divisibles par 2.

Liste des nombres premiers inférieurs à 100 :

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97

Il existe **une infinité** de nombres premiers

III. Trouver tous les diviseurs d'un nombre entier

Méthode : Pour trouver tous les diviseurs d'un nombre entier n, on teste la divisibilité de n par tous les nombres entiers inférieurs ou égaux à $\sqrt{n}$.

Exemple : Liste des diviseurs de 225.

$$\sqrt{225} = 15$$

225 : 1; 3 ; 5 ; 9 ; 15 ; 25 ; 45 ; 75 ; 225

Montrer qu'un nombre est premier :

n est un entier supérieur ou égal à 2.
Pour montrer qu'un nombre *n* est premier, il suffit de montrer qu'il n'est divisible par aucun nombre premier inférieur ou égal à $\sqrt{n}$.

Exemple : 157 est-t-il premier ? $\sqrt{157} \approx 12,52$

Les nombres premiers inférieurs à $\sqrt{157} \approx 12,52$ sont : **2, 3, 5, 7, 11**
$157 \div 2 = 78,5 \quad 157 \div 3 \approx 52,33 \quad 157 \div 5 = 31,4 \quad 157 \div 7 \approx 22,42 \quad 157 \div 11 \approx 14,27$
Donc **157 est un nombre premier** puisqu'il **n'est divisible par aucun nombre premier inférieur ou égal à** $\sqrt{157} \approx 12,52$.

IV. Décomposition et fraction irréductible

1. Décomposition en produit de facteurs premiers

On peut toujours décomposer un nombre non premier en produit de plusieurs facteurs premiers

Exemple : décomposer 350 en produit de facteurs premiers

350	2
175	5
35	5
7	7
1	

On cherche les diviseurs premiers de 350 dans l'ordre croissant.

$350 = 2 \times 5 \times 5 \times 7 = 2 \times 5^2 \times 7$

2. Fraction irréductible

a) Définition

a et b sont deux entiers. On dit que la fraction $\frac{a}{b}$ est irréductible lorsque a et b n'ont que 1 comme diviseur commun.

Exemple :

$\frac{11}{16}$ est une fraction irréductible car 11 et 16 n'ont que **1** comme diviseur commun

Diviseurs de 11 : **1** ; 11 Diviseurs de 16 : **1** ; 2 ; 4 ; 8 ; 16

b) Simplification de $\frac{120}{220}$

Décomposition de 360 en produit de facteurs premiers : $120 = 2^3 \times 3 \times 5$
Décomposition de 220 en produit de facteurs premiers : $220 = 2^2 \times 5 \times 11$

$$\frac{120}{220} = \frac{2^3 \times 3 \times 5}{2^2 \times 5 \times 11} = \frac{\cancel{2} \times \cancel{2} \times 2 \times 3 \times \cancel{5}}{\cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{5} \times 11} = \frac{2 \times 3}{11} = \frac{6}{11}$$

$\frac{6}{11}$ est une fraction irréductible.