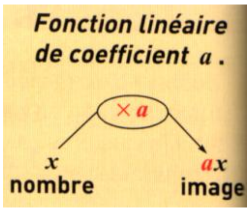
Fonctions linéaires & pourcentages

1. Définitions

a désigne un nombre relatif.
La fonction linéaire de coefficient a est la fonction qui, à un nombre associe le produit de ce nombre par a:
On note cette fonction f : $x \to$ a x
On dit que a x *est l'image de x et on note f(x) = a x*



Exemples :

a) La fonction linéaire de coefficient -3 se note $f : x \to -3x$
L'image du nombre x par la fonction f est le produit de x par -3.
On a donc f(x) = -3x

b) On considère la fonction linéaire de coefficient 2,5
Elle se note $f(x) = 2{,}5x$
Quelles sont les images de 4 ; 10 et 15 par cette fonction ?

Nombre	4	10	15
Image par f	10	25	37,5

× 2.5

$f(4) = 2{,}5 \times 4 = 10$

$f(4) = 10$ donc l'image par f de 4 est 10, on note aussi $f : 4 \to 10$
de même on trouve $f(10) = 2{,}5 \times 10 = 25$ *et* $f(15) = 2{,}5 \times 15 = 37{,}5$

2. Propriétés

a. f est une fonction linéaire de coefficient a.

- L'image du nombre 0 par la fonction f est 0, c'est-à-dire f(0)= 0
- L'image du nombre 1 par la fonction f est a, c'est-à-dire f(1)= a

En effet : f(0)= $0 \times a = 0$ et f(1)= $1 \times a$ = a

b. f est une fonction linéaire de coefficient a, avec a $\neq$ 0
Par cette fonction linéaire, tout nombre admet un et un seul antécédent.
Exemple : On cherche l'antécédent de -35 par la fonction linéaire f de coefficient 7.

La fonction f est définie par f(x) = 7x

On cherche le nombre x tel que $7x = -35$ d'où $x = \frac{-35}{7} = -5$

Donc -5 est le seul et unique antécédent de -35 par f.

3. Lien avec la proportionnalité

Toute situation de proportionnalité peut se traduire mathématiquement par une fonction linéaire dont le coefficient est le coefficient de proportionnalité.

Exemple

A vitesse constante, la distance est proportionnelle au temps.
Prenons comme vitesse **50 km/h**

Temps en heures	2	4,5	10
Distance en km	100	225	500

× 50

Si d désigne la fonction linéaire on note : d : $x \to 50x$
L'image de x est d(x) = 50x

4. Déterminer une fonction linéaire

Déterminer la fonction linéaire f qui à 21 associe –7

21 a pour image –7 donc f(21) = -7. a est le coefficient de la fonction f.

$$-7 = a \times 21 \quad d'où \quad a = \frac{-7}{21} = -\frac{1}{3} \quad donc \quad f(x) = -\frac{1}{3}x$$

5. Représentation graphique

a. Propriété

La représentation graphique d'une fonction linéaire de coefficient a dans un repère est une droite (d) passant par l'origine du repère.

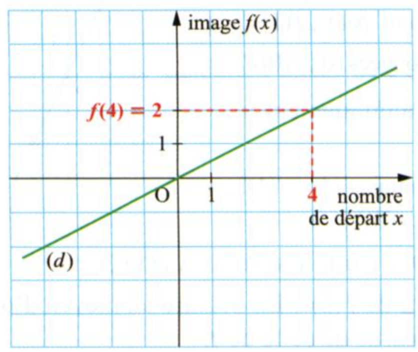
Le nombre a s'appelle le coefficient directeur de la droite (d).

Remarques

- Cette droite passe par l'origine du repère O (0 ; 0) : a × 0 = 0
- Elle passe par le point de coordonnées (1 ; a) : si $x = 1$, y = a × 1 = a

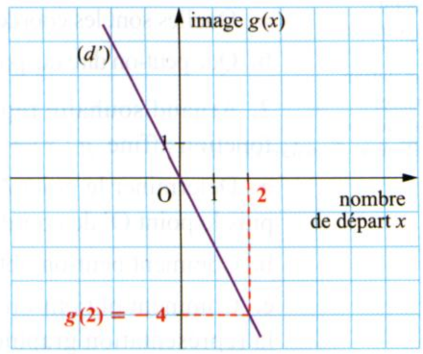
Exemples :

Représentation graphique de $f : x \mapsto \frac{1}{2}x$.



La représentation graphique est une droite (d) passant par l'origine du repère. Pour tracer la droite (d), on détermine les coordonnées d'un deuxième point.
Par exemple, f(4) = 2.
La droite (d) passe par le point A(4 ;2).
0,5 est le coefficient directeur de la droite.

Représentation graphique de $g : x \mapsto -2x$.



La représentation graphique est une droite (d') passant par l'origine du repère. Pour tracer la droite (d'), on détermine les coordonnées d'un deuxième point. Par exemple, g(2) = -4 donc la droite (d') passe par le point B (2 ;-4).

Remarques

Soit f une fonction linéaire tel que $f(x) = a\,x$ et (d) la droite représentation graphique de f

Si le coefficient directeur est **positif** (a>0) la droite est **croissante.**

Si le coefficient directeur est **négatif** (a<0) la droite est **décroissante.**

6. Interprétation graphique

f est une fonction linéaire de coefficient a et x désigne un nombre : on a $f(x+1) = f(x) + a$

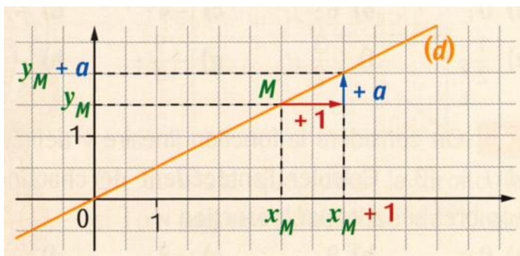
La droite (d) est la représentation graphique d'une fonction linéaire f.

Lorsqu'on augmente de 1 l'abscisse de x_M, alors l'ordonnée y_M augmente de a.

Sur le graphique ci-dessous, a = 0,5.

Le coefficient directeur de la droite est donc 0,5.

Le coefficient de la fonction f est donc 0,5.



7. Augmentation ou diminution en pourcentages

Augmentation en pourcentage

a. Exemple

On place un capital de 5000€ au taux de 4 %. Quel est le nouveau capital au bout d'un an ?

Intérêts au bout d'un an : $5000 \times \frac{4}{100} = 200$ €

Capital accumulé au bout d'un an : $5000 + 200 = 5200$ €

b. Généralisation

On place un capital de x € au taux de 4 %.
Quel est le nouveau capital y au bout d'un an ?

Intérêts au bout d'un an : $x \times \frac{4}{100}$ €

Capital accumulé au bout d'un an : $y = x + x \times \frac{4}{100} = x\left(1 + \frac{4}{100}\right) = x \times 1{,}04$ €

Donc y = 1,04 x (fonction linéaire)

c. Bilan

Si on augmente la valeur x de t %on obtient un nombre y tel que : $y = \left(1 + \frac{t}{100}\right) \times x$

Diminution en pourcentage

a. Exemple

Dans une ville, la population diminue de 3% par an.
Au 1^{e} janvier 1998, il y a 25 000 habitants.
Nombre d'habitants au 1^{e} janvier 1999 ?

Nombre d'habitants en moins en fin d'année : $25000 \times \frac{3}{100} = 750$

Nombre d'habitants au 1^{e} janvier : 25000 - 750 = 24 250

b. Généralisation

On suppose qu'une ville a x habitants à une date donnée.
Soit y le nombre d'habitants de cette ville un an plus tard.

Nombre d'habitants en moins en fin d'année: $x \times \frac{3}{100}$

Nombre d'habitants au 1^{e} janvier : $y = x - x \times \frac{3}{100} = x\left(1 - \frac{3}{100}\right) = x \times 0{,}97$

Donc y = 0,97 x (fonction linéaire)

c. Bilan

Si on diminue la valeur x de t % on obtient un nombre y tel que : $y = \left(1 - \frac{t}{100}\right) \times x$

Prendre un pourcentage d'une quantité, augmenter ou diminuer une quantité d'un pourcentage sont des situations de proportionnalité.

On peut les modéliser par des fonctions linéaires.

	Prendre 5% de *x*, c'est multiplier *x* par 0,05	Augmenter de 5%, c'est multiplier *x* par 1,05	Diminuer *x* de 5%, c'est multiplier *x* par 0,95
Expression littérale	$x \times 0{,}05$	$x \times 1{,}05$	$x \times 0{,}95$
Fonction linéaire : *f*	$f(x) = 0{,}05\,x$	$f(x) = 1{,}05\,x$	$f(x) = 0{,}95\,x$

Exemples :

1) Un abonnement à 60 € augmente de 2,5 %. Le nouveau montant est :

100 + 2,5 = 102,5

$60 \times 1{,}025 = 61{,}5\,€$

Un article coûtait 150 €. Après une réduction de 60 %, il est vendu :

100 - 60 = 40

$150 \times 0{,}4 = 60\,€$

2) Une veste soldée vaut 84€ après une remise de 30%.
Quel était le prix de cette veste avant la réduction ? **120€**

100 - 30 = 70

$x \times 0{,}7 = 84$

$x = 84 \div 0{,}7 = 120$

3) Le loyer d'un appartement a augmenté de 475€ à 480,70€.
Calculer le pourcentage d'augmentation. **1,2%**

$475 \times x = 480{,}7$

$x = 480{,}7 \div 475 = 1{,}012$

$1{,}012 - 1 = 0{,}012 = 1{,}2\%$

4) En une année la consommation d'eau d'une famille est passée de $150\,m^3$ à $126\,m^3$.
Quel est le pourcentage de diminution ? **16%**

$150 \times x = 126$

$x = 126 \div 150 = 0{,}84$

$1 - 0{,}84 = 0{,}16 = 16\%$