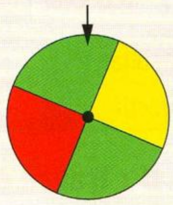
Chapitre 10 Probabilités $3^{ème}$

On réalise les trois expériences suivantes.

On lance une pièce de monnaie équilibrée et on regarde sa face supérieure.	On lance un dé à 6 faces équilibré et on regarde le nombre de points inscrits sur sa face supérieure.	On fait tourner une roue de loterie équilibrée, on attend qu'elle se stabilise et on regarde la couleur désignée par la flèche.
		

I) Vocabulaire et probabilités

1) Issues

Chacun des résultats possibles d'une expérience est une issue de l'expérience.

La pièce de monnaie	Le dé à 6 faces	La roue de loterie
Cette expérience admet 2 issues : pile et face.	Cette expérience admet 6 issues : 1, 2, 3, 4, 5 et 6.	Cette expérience admet 3 issues : vert, rouge et jaune.

2) Evènements

Un évènement est une condition qui peut être, ou ne pas être, réalisée lors d'une expérience.

Un évènement peut être réalisé par une ou plusieurs issues de cette expérience.

Un évènement réalisé par une seule issue est un évènement élémentaire.

La pièce de monnaie	Le dé à 6 faces	La roue de loterie
« *on obtient pile* » est un événement élémentaire.	• « *on obtient un nombre pair* » est un événement réalisé par les issues 2, 4 et 6. • « *on obtient 4* » est un événement élémentaire.	• « *la flèche désigne une couleur primaire* » est un événement réalisé par deux issues : rouge et jaune. • « *la flèche désigne le jaune* » est un événement élémentaire.

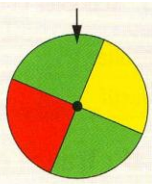
3) Expérience aléatoire

Une expérience est dite aléatoire lorsque chaque issue ne dépend pas des issues des expériences précédentes.

La pièce de monnaie	Le dé à 6 faces	La roue de loterie
Pour chacune des expériences ci-dessus, chaque issue ne dépend pas des issues précédentes. Donc, ces expériences sont des expériences aléatoires.		

Une expérience aléatoire est uniquement due **au hasard**.

4) Issues possibles

		
2 issues sont possibles	6 issues sont possibles	3 issues sont possibles

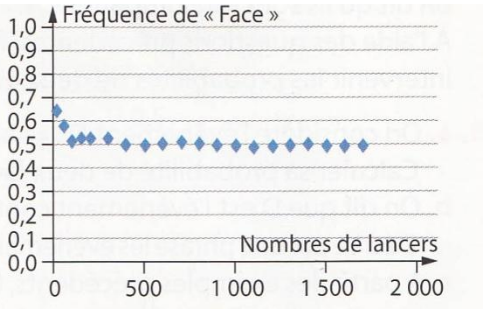
II) Notions de probabilités

1) Définition

Lorsqu'on effectue **un très grand nombre de fois une expérience aléatoire**, la fréquence de réalisation d'un évènement se rapproche d'une « fréquence théorique » appelée **probabilité**.

Exemple

On a lancé un grand nombre de fois une pièce de monnaie équilibrée. On constate que la fréquence de « Face » se stabilise autour de 0,5, ce qui est bien la probabilité d'obtenir « Face ».



2) Notation

Soit **A un évènement**, on note **p(A)** la probabilité que l'évènement *A* se réalise.

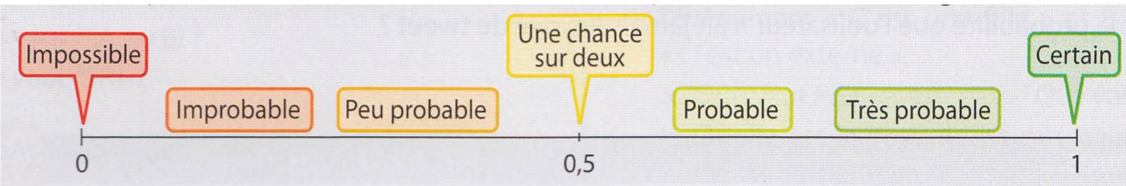
3) Propriétés

Une probabilité est un nombre compris entre 0 et 1

Un évènement dont la probabilité est nulle est un évènement impossible.

Un évènement dont la probabilité est égale à 1 est un évènement certains.

La somme des probabilités de tous les évènements élémentaires est égale à 1



III) Equiprobabilité

1) Définition

Lorsque tous les évènements élémentaires ont la même probabilité d'être réalisées, on dit qu'il s'agit d'une situation d'équiprobabilité.

Dans une situation d'équiprobabilité, tous les évènements élémentaires ont la même probabilité.

La pièce de monnaie	Le dé à 6 faces	La roue de loterie
On a autant de chance d'obtenir pile que face ; il s'agit d'une situation d'équiprobabilité.	On a autant de chance d'obtenir 1, que 2, que 3, que 4, que 5, que 6 ; il s'agit d'une situation d'équiprobabilité.	On a deux fois plus de chance d'obtenir vert que rouge ; il ne s'agit pas d'une situation d'équiprobabilité.

2) Propriété

On désigne par n le nombre d'issues d'une expérience aléatoire

Dans une situation d'équiprobabilité, la probabilité d'un évènement élémentaire est égale $\frac{1}{n}$

La pièce de monnaie	Le dé à 6 faces	La roue de loterie
On considère l'événement élémentaire : F : « *on obtient face* ». On a $p(F) = \frac{1}{2}$.	On considère l'événement élémentaire : N : « *on obtient le nombre 4* ». On a $p(N) = \frac{1}{6}$.	On considère l'événement élémentaire : V : « *on obtient le vert* ». On a $p(V) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

IV) Déterminer la probabilité d'un évènement

1) Définition et propriété

Selon le résultat d'une expérience aléatoire, on dit qu'un **évènement** est réalisé ou non.
la probabilité d'un évènement est égale à **la somme** des probabilités des issues qui le réalisent. C'est un nombre compris entre **0 et 1**.

Exemple

On fait tourner la roue ci-contre divisée en huit secteurs de même aire
Quelle est la probabilité d'obtenir une consonne ?
On note C l'évènement « obtenir une consonne »

$$P(C) = P(M) + P(T) = \frac{3}{8} + \frac{4}{8} = \frac{7}{8}$$

2) Propriété

Dans une expérience aléatoire où toutes les issues sont **équiprobables**, la probabilité d'un évènement A est égale à :

$$P(A) = \frac{\text{nombre d'issues qui réalisent l'évènement } A}{\text{nombre total d'issues}}$$

Exemple

On lance un dé cubique équilibré, on a 6 issues équiprobable : 1, 2, 3, 4, 5, 6
On note A l'évènement « obtenir un nombre plus grand que 4 »
Quelle est la probabilité d'obtenir l'évènement A ?

$$P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Evènements incompatibles

On dit que deux évènements sont **incompatibles** s'ils ne peuvent pas se réaliser en même temps.
Si deux évènement A et B sont incompatibles alors P(A ou B) = P(A) + P(B)

Exemple

Lorsqu'on tire une carte dans un jeu de 32 cartes, les évènements A « obtenir une carte rouge » et B « obtenir un pique » ne peuvent pas réaliser en même temps.
A et B sont incompatibles.
Quelle est la probabilité d'obtenir l'évènement «obtenir une carte rouge ou obtenir un pique » ?

$$P(A ou B) = P(A) + P(B) = \frac{16}{32} + \frac{8}{32} = \frac{24}{32} = \frac{3}{4}$$

3) Evènements contraires

L'évènement contraire d'un évènement A est l'évènement qui se réalise lorsque A n'est pas réalisé.
On le note $\bar{A}$. Sa probabilité $\boxed{P(\bar{A}) = 1 - P(A)}$

Exemple

On tire au sort le nom d'un mois de l'année.
On considère l'évènement A « le nom du mois contient la lettre O »
l'évènement contraire de A est $\bar{A}$: « le nom du mois ne contient pas la lettre O »
Quelle est la probabilité d'obtenir l'évènement A, l'évènement $\bar{A}$?

$$P(A) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \qquad P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{4}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

V) Expérience aléatoire à deux épreuves

La succession de deux expériences aléatoires constitue une expérience aléatoire à deux épreuves.

Exemples

Un sac contient 3 jetons de forme identique. Chacun comporte une lettre A,B,C.

- On tire un premier jeton au hasard, on note la lettre obtenue, puis on le remet dans le sac.
- On tire ensuite un second jeton et on note la lettre obtenue.

Cette expérience aléatoire est constituée de deux épreuves, chaque tirage constituant une épreuve.

Une des issues de cette expérience est par exemple : « Obtenir la lettre A puis obtenir la lettre C ». On peut noter cette issue : (A ; C).

a) Construire un tableau afin de faire apparaître toutes les issues de l'expérience.
b) Déterminer la probabilité d'obtenir au moins une fois la lettre A.

a)

2° tirage / 1° tirage	A	B	C
A	(A ; A)	(A ; B)	(A ; C)
B	(B ; A)	(B ; B)	(B ; C)
C	(C ; A)	(C ; B)	(C ; C)

Il y a donc **9** issues au total toutes équiprobables.

La probabilité d'obtenir par exemple l'issue (A ;C) vaut donc $\frac{1}{9}$

b)On considère l'événement « On obtient au moins une fois la lettre A ».

5 issues réalisent cet événement :

les issues **(A ; A) ; (A ; B) ; (A ; C) ; (B ; A) ; (C ; A)**

La probabilité de cet événement est donc : $\frac{5}{9}$