<u>Chapitre 8</u> : Calcul numérique et PGCD

3^{ème}

Dans tout le cours les nombres considérés sont des entiers positifs

I. Rappels

Donner toutes les façons d'écrire 24 sous forme de produit de deux entiers.	$24 = 1 \times 24$ $\quad$ $24 = 2 \times 12$ $24 = 3 \times 8$ $\quad$ $24 = 4 \times 6$
Dans quelles tables de multiplication se trouve le nombre ?	2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 12 ; 24
Ecrire le nombre 24 sous la forme d'un produit de facteurs différents de 1(tous les facteurs différents), tels que le nombre de facteurs soit supérieur à deux	$2 \times 3 \times 4$

II. Vocabulaire : Multiples et diviseurs

$24 = 12 \times 2$	24 est un multiple de 2 24 est un multiple de 12 2 est un diviseur de 24 12 est un diviseur de24

On dit aussi que 2 et 12 **divisent** 24 ou que 24 est **divisible** par 2, par 12

1. Définition

Soient a et k deux entiers naturels avec $k \neq 0$
S'il existe un nombre b tel que $a = k \times b$, on dit que :

- **k est un diviseur de a**
- **a est divisible par k**
- **a est un multiple de k**

Remarque
$a = k \times b$
b est un diviseur de **a** et **a** qui est un multiple de **b**

2. Rappel : Critères de divisibilité par 2, 3, 5 et 9

- **Un nombre entier est divisible par 2 s'il se termine par 0, 2, 4, 6, 8**
- **Un nombre entier est divisible par 5 s'il se termine par 0 ou 5**
- **Un nombre entier est divisible par 3 si la somme de ces chiffres est divisible par 3**
- **Un nombre entier est divisible par 9 si la somme de ces chiffres est divisible par 9**

3. Exercice

Donner la liste ordonnée de tous les diviseurs de 24	1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 12 ; 24
Donner la liste ordonnée de tous les diviseurs de 36	1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 9 ; 12 ; 18 ; 36
Donner la liste ordonnée des diviseurs commun de 24 et 36	1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 12
Quel est le plus grand diviseur commun de 24 et 36 ?	12

III. Diviseurs communs à deux entiers ; PGCD

1. Diviseurs commun à deux nombres

Un diviseur commun à a et b est un nombre entier qui divise à la fois a et b.

- Diviseurs commun à 175 et 245

Diviseurs de 175	**1**	**5**	**7**	25	**35**	175
Diviseurs de 245	**1**	**5**	**7**	**35**	49	245

Les diviseurs communs sont : **1 ; 5 ; 7 ; 35**

- Diviseurs commun à 45 et 28

Diviseurs de 45	**1**	3	5	9	15	45
Diviseurs de 28	**1**	2	4	7	14	28

Un seul diviseur commun **1**

2. Définitions du PGCD

Parmi les diviseurs communs à a et b, l'un deux est plus grand que les autres.
On l'appelle le Plus Grand Commun Diviseur et on le note PGCD (a ; b).

Exemples : PGCD(18 ; 12) = 6 PGCD(20 ; 50) = 10 PGCD(45 ; 18) = 9

3. Algorithmes de recherche du PGCD de deux nombres

1. Propriété

Liste ordonnée des diviseurs de 45	1 ; 3 ; 5 ; 9 ; **15** ; 45
Liste ordonnée des diviseurs de 75	1 ; 3 ; 5 ; **15** ; 25 ; 75
Liste des diviseurs communs à 45 et 75	1 ; 3 ; 5 ; **15**
Liste ordonnée des diviseurs de 45+75=120	1; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 8 ; 10 ; 12 ; **15**; 20 ; 24 ; 30 ; 40 ; 60 ; 120
Liste ordonnée des diviseurs de 75-45=30	1 ; 3 ; 5 ; 6 ; 10 ; **15** ; 30
Liste des diviseurs communs à 75 et 120	1 ; 3 ; 5 ; **15**
Liste des diviseurs communs à 45 et 120	1 ; 3 ; 5 ; **15**
Liste des diviseurs communs à 75 et 30	1 ; 3 ; 5 ; **15**
Liste des diviseurs communs à 45 et 30	1 ; 3 ; 5 ; **15**

Dans chaque ligne de diviseurs communs on remarques que le PGCD est le même **15**

Propriété

Si ***k*** est le PGCD de deux nombres ***a*** et ***b*** (***a*** >***b***) alors k est aussi :
- le PGCD de ***a*** et de ***a*** + ***b***
- le PGCD de ***b*** et de ***a*** + ***b***
- le PGCD de ***a*** et de ***a*** – ***b***

- le PGCD de ***b*** et de ***a*** – ***b*** → cas le plus intéressant car ainsi on diminue les nombres de départ puisqu'on prend le plus petit et la différence.

IV. Recherche du PGCD par la méthode des soustractions successives

- **On soustrait les deux nombres**
- **on prend les deux plus petits et on recommence**
- **on s'arrête quand les deux plus petits sont égaux (ou la dernière différence est égale à 1)**
- **le PGCD est représenté par ces derniers nombres (ou égale à 1 : nombres premiers entre eux)**

Exemple 1 : PGCD (72 ; 54)

Etapes			Différences
1	72	54	18
2	54	18	36
3	36	18	18
4	18	18	0

PGCD (72 ; 54) = 18

Exemple 2 : PGCD (75 ; 28)

Etapes			Différences
1	75	28	47
2	47	28	19
3	28	19	9
4	19	9	10
5	10	9	1

PGCD (75 ; 28) = 1

Exemple 3 : PGCD (231 ; 42)

Etapes			Différences
1	231	42	189
2	189	42	147
3	147	42	105
4	105	42	63
5	63	42	21
6	42	21	21
7	21	21	0

PGCD (231 ; 42) = 21

On remarque que l'on soustrait **5 fois 42** et qu'on pourrait passer directement à la 6$^{\text{ième}}$ étape en soustrayant tout de suite **5×42 à 231**.
En effet : $231 = 5 \times 42 + 21$ (**Division euclidienne de 231 par 42**)
21 est le reste de la division euclidienne.
On a donc :
PGCD (231 ; 42) = PGCD (42 ; 21)

Propriété :
Si r **est le** reste **de la division euclidienne de** a **par** b **(a > b) alors PGCD (** a **;** b **) = PGCD (** b **;** r **)**

V. Recherche du PGCD par la méthode des divisions successives

Algorithme d'Euclide

- **on divise le plus grand nombre par le plus petit et on note le reste de la division euclidienne**
- **on recommence en divisant à chaque fois le diviseur précédent par le reste obtenu**
- **l'algorithme s'arrête lorsqu'on obtient un reste nul : le PGCD est le dernier reste non nul.**

Exemple : PGCD (1078 ; 322)

Etapes			Reste
1	1078	322	112
2	322	112	98
3	112	98	14
4	98	14	0

Le PGCD de 1078 et 322 est le dernier reste non nul soit 14

Pour trouver le reste 112, il suffit de diviser 1078 par 322.

Certaines calculatrices ont une touche **: R** ou ├

La séquence 1078 $\boxed{: R}$ 322 $\boxed{=}$ donne directement le reste 112 de la division euclidienne

VI. Nombres premiers entre eux ; Fractions irréductibles

1. Nombres premiers

On dit que deux entiers non nuls a et b sont premiers entre eux si leur PGCD est égal à 1

Exemples :

PGCD (175 ; 245) = **35**
Les deux entiers 175 et 245 ne sont pas deux nombres premiers entre eux.

PGCD(45 ; 28) = **1** ;
Les deux entiers 45 et 28 sont deux nombres premiers entre eux.

2. fractions irréductibles

a. Définition

Une fraction est irréductibles si son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux.

Exemples :

$$\frac{21}{40} \; est\, une\ fraction\ irréductible \quad PGCD(21;40)=1$$
$$\frac{66}{207} \; n'est\ \ pas\ une\ fraction\ irréductible \quad PGCD(66;207)=3$$
$$\frac{66}{207}=\frac{22}{69}$$

b. Règle

Pour rendre une fraction irréductible, il suffit de diviser le numérateur et le dénominateur par leur PGCD ;

Exemples

$$\frac{306}{414} \qquad PGCD(306;414)=18$$
$$\frac{306\div 18}{414\div 18}=\frac{17}{23}$$