<u>Chapitre 8</u> : Calcul numérique et PGCD

3ème

Dans tout le cours les nombres considérés sont des entiers positifs

I. <u>Rappels</u>

Donner toutes les façons d'écrire 24 sous forme de produit de deux entiers.	24 = …..×….. 24 = …..×….. 24 = …..×….. 24 = …..×…..
Dans quelle tables de multiplication se trouve le nombre ?	
Donner toutes les autres façons d'écrire 24 (sous forme de produits de facteurs différents de 1, tels que le nombre de facteurs soit supérieur à deux)	

II. <u>Vocabulaire : Multiples et diviseurs</u>

Compléter les phrases suivantes avec les mots « *multiples* » et « *diviseurs* »

$24 = 12 \times 2$	24 est un ………………..de ….. 24 est un ………………..de ….. 2 est un …………………de.……. ….. est un …….………….de………

On dit aussi que 2 et 12 **divisent** 24 ou que 24 est **divisible** par 2, par 12

<u>Définition</u>

Soient a et k deux entiers naturels avec $k \neq 0$

S'il existe un nombre b tel que $a = k \times b$, on dit que :

- **k est un diviseur de a**
- **a est divisible par k**
- **a est un multiple de k**

<u>Remarque</u>

Si $a = k \times b$, on a aussi b qui est un diviseur de a et a qui est un multiple de b

<u>Rappel : Critères de divisibilité par 2, 3, 5 et 9</u>

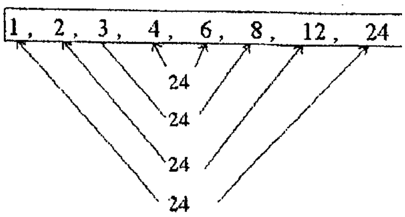
- **Un nombre entier est divisible par 2 s'il se termine par 0, 2, 4, 6, 8**
- **Un nombre entier est divisible par 5 s'il se termine par 0 ou 5**

- **Un nombre entier est divisible par 3 si la somme de ces chiffres est divisible par 3**
- **Un nombre entier est divisible par 9 si la somme de ces chiffres est divisible par 9**

<u>Exercice</u>

Donner la liste ordonnée de tous les diviseurs de 24	
Donner la liste ordonnée de tous les diviseurs de 36	
Donner la liste ordonnée des diviseurs commun de 24 et 36	
Quel est le plus grand diviseur commun de 24 et 36 ?	

<u>Remarque :</u> on observe la liste ordonnée des diviseurs de 24 , on constate que :



III. Diviseurs communs à deux entiers ; PGCD

1. Diviseurs commun à deux nombres

Un diviseur commun à a et b est un nombre entier qui divise à la fois a et b.

- Diviseurs commun à 175 et 245

Diviseurs de 175	**1**				
Diviseurs de 245	**1**				

Les diviseurs communs sont : **1**

- Diviseurs commun à 45 et 28

Diviseurs de 45	**1**				
Diviseurs de 28	**1**				

Un seul diviseur commun **1**

2. Définitions du PGCD

Parmi les diviseurs communs à a et b, l'un deux est plus grand que les autres.
On l'appelle le Plus Grand Commun Diviseur et on le note PGCD (a ; b).

Exemples : PGCD(18 ; 12) = 6 PGCD(20 ; 50) = 10 PGCD(45 ; 18) = 9

3. Algorithmes de recherche du PGCD de deux nombres

1. Propriété

Liste ordonnée des diviseurs de 45	
Liste ordonnée des diviseurs de 75	
Liste des diviseurs communs à 45 et 75	
Liste ordonnée des diviseurs de 45+75=120	
Liste ordonnée des diviseurs de 75-45=30	
Liste des diviseurs communs à 75 et 120	
Liste des diviseurs communs à 45 et 120	
Liste des diviseurs communs à 75 et 30	
Liste des diviseurs communs à 45 et 30	

Dans chaque ligne de diviseurs communs (ligne en gras) , entoure le PGCD

Que remarques-tu ? ……………………………………………………

Si ***k*** est le PGCD de deux nombres ***a*** et ***b*** (***a*** >***b***) alors k est aussi :
- le PGCD de ***a*** et de ***a*** + ***b***
- le PGCD de ***b*** et de ***a*** + ***b***
- le PGCD de ***a*** et de ***a*** – ***b***

- le PGCD de ***b*** et de ***a*** – ***b*** → cas le plus intéressant car ainsi on diminue les nombres de départ puisqu'on prend le plus petit et la différence.

IV. Recherche du PGCD par la méthode des soustractions successives

- **On soustrait les deux nombres**
- **on prend les deux plus petits et on recommence**
- **on s'arrête quand les deux plus petits sont égaux (ou la dernière différence est égale à 1)**
- **le PGCD est représenté par ces derniers nombres (ou égale à 1 : nombres premiers entre eux)**

Exemple 1 : PGCD (72 ; 54)

Etapes			Différences
1	72	54	
2	54		
3	36		
4			

PGCD (72 ; 54)=

Exemple 2 : PGCD (75 ; 28)

Etapes			Différences
1	75	28	
2	47	28	
3	28		
4	19		
5	10		

PGCD (75 ; 28) =

Exemple 3 : PGCD (231 ; 42)

Etapes			Différences
1	231	42	
2	189	42	
3			
4			
5			
6			
7			

PGCD (231 ; 42)=

On remarque que l'on soustrait **5 fois 42** et qu'on pourrait passer directement à la 6$^{\text{ième}}$ étape en soustrayant tout de suite **5×42 à 231**.
En effet : $231 = 5 \times 42 + 21$ (**Division euclidienne de 231 par 42**)
21 est le reste de la division euclidienne.
On a donc :
PGCD (231 ; 42) = PGCD (42 ; 21)

Propriété :
Si r **est le** reste **de la division euclidienne de** a **par** b **(a > b) alors PGCD (** a ; b **) = PGCD (** b ; r **)**

V. Recherche du PGCD par la méthode des divisions successives

Algorithme d'Euclide

- **on divise le plus grand nombre par le plus petit et on note le reste de la division euclidienne**
- **on recommence en divisant à chaque fois le diviseur précédent par le reste obtenu**
- **l'algorithme s'arrête lorsqu'on obtient un reste nul : le PGCD est le dernier reste non nul.**

Exemple : PGCD (1078 ; 322)

Etapes			Reste
1	1078	322	112
2			
3			
4			

Le PGCD de 1078 et 322 est le dernier reste no nul soit ……

Pour trouver le reste 112, il suffit de diviser 1078 par 322.

Certaines calculatrice ont une touche **: R** ou ├

La séquence 1078 $\boxed{: R}$ 322 $\boxed{=}$ donne directement le reste 112 de la division euclidienne

VI. Nombres premiers entre eux ; Fractions irréductibles

1. Nombres premiers

………………………………………………………………………………………………

Exemples :

PGCD(175 ; 245) = **………**
Les deux entiers 175 et 245 …………………………………………………………………

PGCD(45 ; 28) = …..
Les deux entiers 45 et ……………………………………………………………………

2. fractions irréductibles

a. Définition

Une fraction est irréductibles si …………………………………………………

………………………………………………………………………………………

Exemples :

$\frac{21}{40}$ $PGCD(21;40)=$……….. donc ………………………………………

$\frac{66}{207}$ $PGCD(66;207)=$……….. donc ………………………………………

$\frac{66}{207}=\frac{\dots\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots\dots}$

b. Règle

Pour rendre une fraction irréductible, ……………………………………………

………………………………………………………………………………………

Exemples

$\frac{306}{414}$ $PGCD(306;414)=$……….

$\frac{306\div\dots\dots\dots\dots}{414\div\dots\dots\dots\dots}=\frac{\dots\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots\dots}$