Chapitre 9 : Relations trigonométriques dans un triangle rectangle (2)

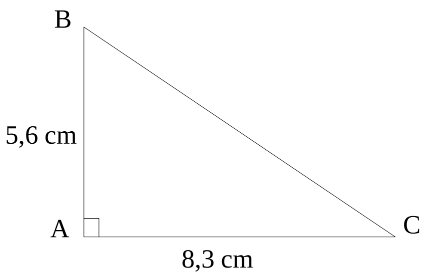
I. Calcul d'un angle

Méthode :
Pour obtenir la mesure d'un angle connaissant la valeur de son cosinus, de son sinus ou de sa tangente, on utilise respectivement les touches « $\cos^{-1}$ », « $\sin^{-1}$» et « $\tan^{-1}$ » de la calculatrice.
Exemple :
Si sin x = 0.78 alors la valeur approchée de l'angle x au centième près est x = …
(on tape $\sin^{-1}$0.78)

Activité : Compléter le tableau suivant *(arrondir au millième)*

Angle x	0	30	40	45	90
Cos x	1	0,866	0,766	0,707	0
Sin x	0	0.5	0,643	0,707	1
Tan x	0	0,577	0,839	1	Erreur

Application :



ABC est un triangle rectangle en A tel que AB = 5,6 cm et AC = 8,3 cm.
Calculer $A\hat{B}C$ et donner une valeur arrondie à 1° près.

Le triangle ABC est rectangle en A : $\tan\left(\hat{B}\right)=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{8,3}{5,6}$ $\quad \hat{B}\approx 56°$

On tape 8,3 $\boxed{\div}$ 5,6 $\boxed{=}$ 1,482142857
Puis :

$\boxed{\text{INV}}$ $\boxed{\text{TAN}}$ $\boxed{\text{ANS}}$

Ou bien

$\boxed{\text{INV}}$ $\boxed{\text{TAN}}$ $\boxed{(}$ 8,3 $\boxed{\div}$ 5,6 $\boxed{)}$ $\boxed{=}$

II. Propriétés

1. Relation entre sinus et cosinus

Quelle que soit la mesure α d'un angle aigu on a :

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

Preuve

On considère le triangle ABC rectangle en A.

$$(\cos \widehat{ABC})^2 + (\sin \widehat{ABC})^2 = \left(\frac{AB}{BC}\right)^2 + \left(\frac{AC}{BC}\right)^2 = \frac{(AB + AC)^2}{BC^2} = \frac{BC^2}{BC^2} = 1$$

Exemple :

$0 < \alpha < 90$ et $\sin \alpha = \dfrac{2}{3}$. Quelle est la valeur de cos α ?

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 \qquad \cos^2 \alpha + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1 \qquad \cos^2 \alpha = 1 - \frac{4}{9}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{5}{9} \qquad \cos \alpha = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

2. Tangente

Quelle que soit la mesure α d'un angle aigu on a : $\tan \alpha = \dfrac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

Preuve :

On considère le triangle ABC rectangle en A.

$$\frac{\sin \widehat{ABC}}{\cos \widehat{ABC}} = \frac{\frac{AC}{BC}}{\frac{AB}{BC}} = \frac{AC}{BC} \times \frac{BC}{AB} = \frac{AC}{AB} = \tan \widehat{ABC}$$

Exemple : $0 < \alpha < 90$; $\sin \alpha = \dfrac{2}{3}$ et $\cos \alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$

Quelle est la valeur de tan α ?

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} = \frac{2}{3} \times \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Valeurs remarquables

α en degré	0	30	45	60	90
Cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
Tan α	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\times$

Autre exemple

x est la mesure d'un angle aigu et sin x = 0,8.
Calculer la valeur exacte de cos x et de tan x.

On sait que : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ $\qquad$ $\cos^2 x = 1 - 0{,}8^2$ $\qquad$ $\cos^2 x = 1 - 0{,}64$

$\cos^2 x = 0{,}36$ comme cos x est positif cos x = $\sqrt{0{,}36} = 0{,}6$

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{0{,}8}{0{,}6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$