

Arithmétique

1. Nombres premiers

a. Définition

Un nombre premier est un entier naturel qui admet exactement deux diviseurs distincts, 1 et lui-même.

b. Exemples :

7 est premier, il n'est divisible que par 1 et 7.

15 n'est pas premier, il est divisible par 3 et 5.

c. Remarques

Le nombre 1 n'est pas premier car il n'a qu'un seul diviseur, lui-même.

Le nombre 0 n'est pas premier car il admet une infinité de diviseurs.

Le nombre 2 est le seul nombre premier pair car tous les nombres pairs sont divisibles par 2.

d. Nombres premiers jusqu'à 30

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

nombres premiers

Liste des nombres premiers inférieurs à 100 :

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41,
43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97

Cette liste est infinie.

2. Application aux fractions

Décomposition d'un nombre en produits de facteurs premiers

$30 = 2 \times 3 \times 5$ est une décomposition du nombre 30 en produits de facteurs premiers.

En effet, chaque facteur de la décomposition est un nombre premier.

Méthode : Décomposer un nombre en produits de facteurs premiers

Décomposer 860 en produits de facteurs premiers.

Pour le faire, il est important de bien connaître le début de la liste des nombres premiers : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, ...

On commence par tester si 860 est divisible par 2 (1^{er} nombre premier).

La réponse est « oui » car 84 se termine par un chiffre pair.

Et on a : $860 : 2 = 430$

$$\begin{array}{r|l} 860 & 2 \\ \hline 430 & \end{array}$$

On recommence, en testant si 430 est divisible par 2.

La réponse est « oui » et $430 : 2 = 215$

$$\begin{array}{r|l} 860 & 2 \\ \hline 430 & 2 \\ \hline 215 & \end{array}$$

On recommence, en testant si 21 est divisible par 2.

La réponse est « non » !

On teste alors le nombre premier suivant dans la liste.

Est-ce que 21 est divisible par 3.

La réponse est « non » !

Est-ce que 21 est divisible par 5

La réponse est « oui ».

Et on a : $215 : 5 = 43$

43 est un nombre premier divisible uniquement par 1 et lui même.

$$\begin{array}{r|l} 860 & 2 \\ \hline 430 & 2 \\ \hline 215 & 5 \\ \hline 43 & \end{array}$$

Et on a $43 : 43 = 1$.

C'est fini, on trouve 1 !

$$\begin{array}{r|l} 860 & 2 \\ \hline 430 & 2 \\ \hline 215 & 5 \\ \hline 43 & 43 \\ \hline 1 & \end{array}$$

La décomposition en facteurs premiers de 860 se lit dans la colonne de droite.

$$860 = 2 \times 2 \times 5 \times 43$$



Exemples :

588	2		470	2		1395	3
294	2		235	5		465	3
147	3		47	47		155	5
49	7		1			31	31
7	7					1	
1							

$$588 = 2 \times 2 \times 3 \times 7 \times 7$$

$$470 = 3 \times 5 \times 47$$

$$1395 = 3 \times 3 \times 5 \times 31$$

Fractions égales et simplification

Méthode : Déterminer des fractions égales

Simplifier la fraction $\frac{153}{85}$.

Pour simplifier une fraction, il faut décomposer son numérateur et son dénominateur en produits de facteurs premiers.

153	3	85	5
51	3	17	17
17	17	1	
1			

On a ainsi les décompositions de 153 et 85 :

$$153 = 3 \times 3 \times 17 \text{ et } 85 = 5 \times 17$$

$$\text{Donc : } \frac{153}{85} = \frac{3 \times 3 \times 17}{5 \times 17} = \frac{3 \times 3}{5} = \frac{9}{5}$$

Exemple

Simplification de $\frac{1116}{1302}$

1116	2		1302	2
558	2		651	3
279	3		217	7
93	3		31	31
31	31		1	
1				

Décomposition de 1116 en produit de facteurs premiers : $1116 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 31$

Décomposition de 1302 en produit de facteurs premiers : $1302 = 2 \times 3 \times 7 \times 31$

$$\frac{1116}{1302} = \frac{2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 31}{2 \times 3 \times 7 \times 31} = \frac{2 \times 3}{7} = \frac{6}{7}$$

$\frac{1116}{1302} = \frac{6}{7}$ et $\frac{6}{7}$ est une fraction simplifiée au maximum