

EPI : Maths français 3^{ème}

Perception et représentation de l'univers, des distances inaccessibles de la terre à la lune

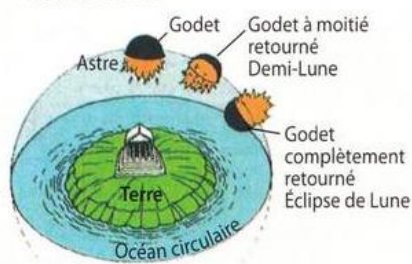
Au début des sciences grecques, les représentations de l'univers étaient variées. Thalès pensait que la Terre était plate et flottait sur l'eau. L'eau était l'élément premier.

Anaximandre l'imaginait comme un cylindre isolé dans l'espace. L'élément premier est le feu.

Pythagore pensait en revanche que la terre était sphérique. La Terre est au centre de l'univers et les astres tournent autour de la Terre.

Platon se faisait également une représentation sphérique de la Terre.

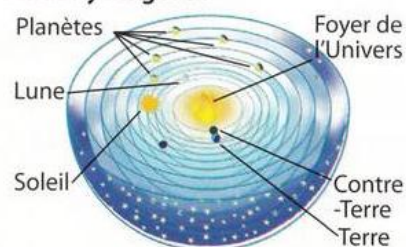
● Par Thalès :



● Par Anaximandre :

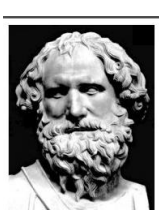
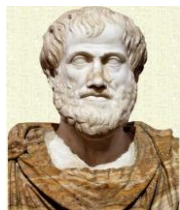


● Par Pythagore :



Nous allons montrer comment les mathématiques ont permis de préciser la vision du monde grâce aux calculs de longueurs inaccessibles.

La toute première méthode pour estimer la distance Terre-Lune date de l'Antiquité grecque. Elle est basée sur l'observation des éclipses de Lune.



VIDEO

Les théories de Stephen Hawking: les éclipses de Lune

Read more at

<http://maths-gp-2015.e-monsite.com/videos/les-theories-de-stephen-hawking-les-eclipses-de-lune.html#gv0FteTkJ0jZJAGO.99>

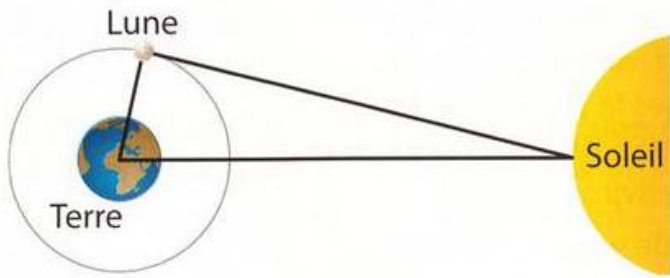
Aristarque de Samos et Eratosthène

Aristarque est né en -310 et mort en -230. Il a travaillé à Alexandrie en Egypte, ville fondée en -330 par Alexandre le Grand, roi de Macédoine. Il a calculé la distance Terre Lune, même s'il ne connaissait pas le rayon de la Terre qui fut déterminé plus tard par Eratosthène. Il a essayé en vain de déterminer la distance Terre Soleil. Eratosthène est né en -276 à Cyrène en Libye et mort en -230. Il a réussi à déterminer le rayon de la Terre.

Estimation de la distance Terre-Soleil par Aristarque :

Aristarque pense qu'au moment d'un quartier, la Lune reçoit les rayons du Soleil perpendiculairement à sa surface. L'angle formé par la Terre, la Lune et le Soleil est de 90° . Il mesure l'autre angle formé par la Lune, la Terre et le Soleil dont le centre est la Terre et trouve 87° .

A l'aide du schéma ci-dessous, montrer à la manière d'Aristarque que le Soleil est 19 fois plus éloigné de la Terre que ne l'est la Lune.



Le triangle formé par la Terre, la Lune et le Soleil est un triangle rectangle, l'angle droit étant la Lune.

$$\cos \text{ de l'angle mesuré} = \frac{\text{Dis tan ce terre Lune}}{\text{Dis tan ce Terre Soleil}}$$

$$\cos 87^\circ = \frac{\text{dis tan ce Terre Lune}}{\text{dis tan ce Terre Soleil}} \text{ donc distance Terre Soleil} = \frac{\text{dis tan ce Terre Lune}}{\cos 87^\circ}$$

Soit distance Terre-Soleil \approx distance Terre-Lune \times 19.

Aristarque en déduit donc que le Soleil est 19 fois plus éloigné de la Terre que ne l'est la Lune.

Estimation du diamètre du Soleil par Aristarque :

Il observe les éclipses de Lune et constate que les plus longues éclipses durent 2h. A chaque heure, la Lune avance par rapport à l'ombre de la Terre d'une fois son diamètre. Il en conclut que le diamètre de la Lune est environ trois fois plus petit que celui de la Terre. Au moment d'une éclipse de Soleil, le diamètre apparent de la Lune est à peu près égal à celui du Soleil.

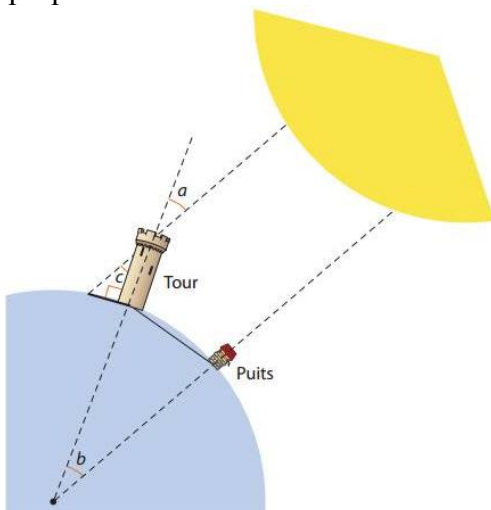
A partir de son estimation de la distance Terre-Soleil par rapport à la distance Terre-Lune, il en déduit que :

Le diamètre du Soleil est 5,7 fois plus gros que celui de la Terre.



Estimation du rayon de la Terre par la démarche d'Eratosthène

Eratosthène constata que le Soleil éclairait un jour par an le fond d'un puits de la ville de Syène et en même temps, à Alexandrie, située à 800km de Syène, une tour de 25m de haut faisait une ombre de 3,10m. Expliquer la démarche d'Eratosthène et donner une estimation du rayon de la Terre.

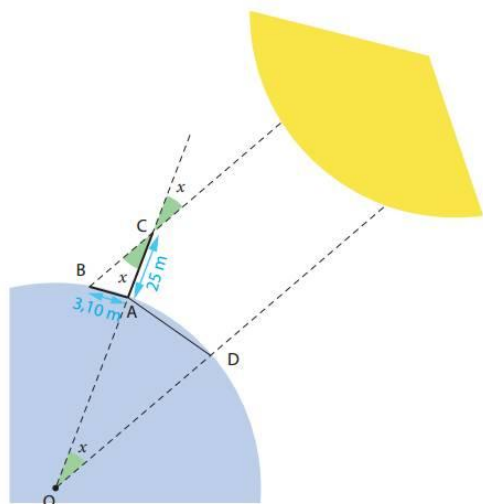


On considère que les rayons du Soleil sont parallèles.

Les angles a et c sont symétriques par rapport à un point donc de même mesure.

Les angles b et c sont deux angles alternes internes déterminés par deux droites parallèles donc ils ont la même mesure.

Ainsi les trois angles a, b, c ont la même mesure qu'on appellera x.



Calculer la mesure de l'angle x :

Le triangle ABC est rectangle en A. $AB = 3,1\text{m}$ et $AC = 25\text{m}$

$$\tan \hat{BCA} = \frac{3,1}{25} \quad x \approx 7,1^\circ$$

Calculer le périmètre de la Terre :

On connaît la longueur du petit arc de cercle d'extrémités A et D qui est de 800km.

Il y a proportionnalité entre la longueur de l'arc et l'angle correspondant.

Compléter le tableau : y représente le périmètre de la Terre (le périmètre d'un grand cercle de la Terre)

Mesure de l'angle en degrés	360	7,1
Longueur de l'arc correspondant	y	800

Effectuer un produit en croix pour calculer y :

$$y = \frac{360 \times 800}{7,1} \approx 40563$$

Le périmètre de la Terre trouvé par Eratosthène est d'environ 40563 km.

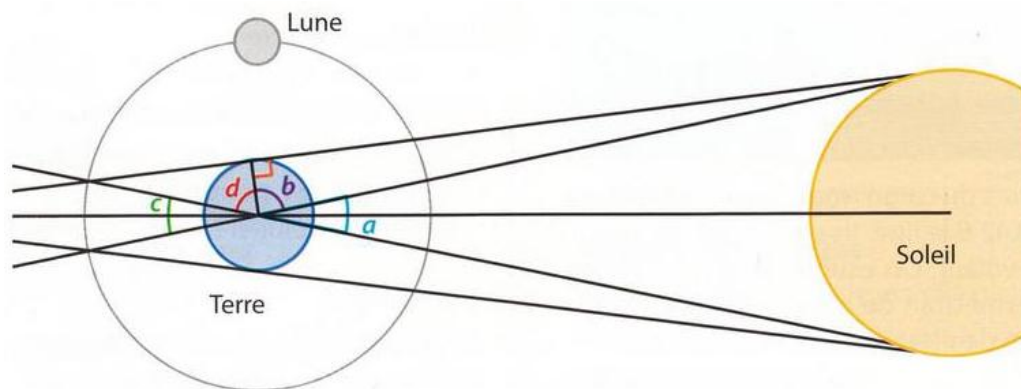
En déduire une valeur approchée du rayon de la Terre :

Le périmètre d'un cercle de rayon R est donné par la formule : $2 \times \pi \times R$

On a donc $R = 40563 \div 2\pi \approx 6455$

L'estimation du rayon de la Terre par Eratosthène est donc de 6455km.

Mesure de la distance Terre-Lune par Hipparque :



Hipparque observe que la durée d'une éclipse de Lune doit être en rapport avec la distance Terre-Lune . Plus cette distance est petite, plus la durée de l'éclipse sera longue. Il sait par les travaux d'Aristarque que le Soleil est très éloigné et qu'ainsi ses rayons sont parallèles. Il suppose que $b=90^\circ$.

Il sait aussi que la Lune fait le tour de la Terre en 29,5 jours, soit 708 heures et que les éclipses les plus longues durent 2h30. Il part du principe que $a = 0,5^\circ$.

$$\text{Calcul de l'angle } c : c = 2,5 \times \frac{360}{708} \approx 1,27$$

$$\text{Sur la figure on a : } \frac{a}{2} + b + d + \frac{c}{2} = 180^\circ$$

$$d = 180^\circ - \left(\frac{a}{2} + b + \frac{c}{2} \right) = 180^\circ - (0,25 + 90 + 0,63) = 89,12$$

Ainsi dans le triangle rectangle où figure l'angle d, on a :

$$\cos 89,12 = \frac{\text{Diamètre de la Terre}}{\text{Distance Terre Lune}}$$

$$\text{Distance Terre-Lune} = \frac{\text{Diamètre de la Terre}}{\cos 89,12^\circ} \approx 420294$$

D'après Hipparque et Eratosthène: Distance Terre-Lune \approx 420294 km

Comparer les quatre distances aux distances réelles :

Distance Terre-Soleil par Aristarque : $19 \times 420294 = 7985586$ soit environ 8 millions de km.

En réalité : 149,6 millions de km

Taille du Soleil par Aristarque : $5,6 \times 6455 \approx 36794$; 36794 km de rayon

En réalité : 695 700 km de rayon.

Taille de la Terre par Eratosthène : 6455 km de rayon.

En réalité : 6371 km de rayon.

Distance Terre-Lune pour Hipparque : 420 294 km

En réalité : 384 400 km.

Les mathématiques ont permis de préciser certaines distances astronomiques, mais les distances très lointaines sont encore mal estimées ; les progrès qui surviendront plus tard permettront de poursuivre cette avancée.

D'autres méthodes suivirent, la méthode de triangulation par deux scientifiques français Lalande et La Caille au 18^{ème} siècle et la méthode très récente de l'écho laser.

La méthode de l'écho laser

En 1969, lors de la mission Apollo 11, plusieurs réflecteurs ont été déposés à la surface de la Lune, à des positions bien précises.

Le but de ces réflecteurs était de pouvoir renvoyer un faisceau laser provenant de la Terre, afin de déterminer la distance Terre – Lune.

Le principe est simple, un laser très puissant envoie son signal en direction de la Lune, en pointant précisément un des réflecteurs, le signal est réfléchi et revient peu de temps après au même endroit sur Terre.

On mesure ensuite le temps que le signal a mis pour faire l'aller-retour Terre – Lune, et on en déduit la distance. C'est la technique de l'écho laser.

