

Equations

I) Définitions et propriétés

1) Définitions

Une équation est une égalité dans laquelle interviennent un ou plusieurs nombres inconnus.

Ceux-ci sont désignés par des lettres (x, y, z, \dots).

Exemple :

$$\begin{array}{ccc} & x + 3 = 12 - 2x & \\ \nearrow & & \nwarrow \\ 1^\circ \text{ membre} & & 2^\circ \text{ membre} \end{array}$$

Résoudre une équation à une inconnue x , c'est déterminer toutes les valeurs numériques que l'on peut donner à x pour que l'égalité soit vraie.

Chacune de ces valeurs est une solution de l'équation.

Exemples :

On considère l'équation d'inconnue x : $x + 3 = 12 - 2x$

3 est-il solution de l'équation ? Oui car $3 + 3 = 6$ et $12 - 2 \times 3 = 12 - 6 = 6$

1 est-il solution de l'équation ? Non car $1 + 3 = 4$ et $12 - 2 \times 1 = 12 - 2 = 10 \neq 4$

2) Egalités et opérations (rappels 4^{ème})

1. Règle 1

Lorsqu'on ajoute ou l'on retranche un même nombre aux deux membres d'une égalité, on obtient une nouvelle égalité.

Si $a = b$ alors $a + c = b + c$

Si $a = b$ alors $a - c = b - c$

Exemple : $x = 13$

$$x + 5 = 13 + 5 \quad x + 5 = 18$$

$$x - 9 = 13 - 9 \quad x - 9 = 4$$

2. Règle 2

Lorsqu'on multiplie ou l'on divise par un même nombre (différent de zéro) les deux membres d'une égalité, on obtient une nouvelle égalité.

Si $a = b$ alors $a \times c = b \times c$

Si $a = b$ alors $a \div c = b \div c$

Exemple : $x = 18$

$$x \times 3 = 18 \times 3 \quad x \times 3 = 54 \quad \text{ou} \quad 3x = 54$$

$$x \div 9 = 18 \div 9 \quad x \div 9 = 2 \quad \text{ou} \quad x / 9 = 2$$

II) Résolution d'équations de la forme $a x + b = c x + d$

Résolution de l'équation $3x + 1 = 21 - 2x$

$$\begin{array}{l} 3x + 1 = 21 - 2x \\ 3x + 1 - 1 = 21 - 2x - 1 \quad \leftarrow \text{On soustrait } 1 \text{ aux deux membres} \\ 3x = 20 - 2x \quad \leftarrow \text{de l'égalité } 3x + 1 = 21 - 2x \\ 3x + 2x = 20 - 2x + 2x \quad \leftarrow \text{On ajoute } 2x \text{ aux deux membres} \\ 5x = 20 \quad \leftarrow \text{de l'égalité } 3x = 20 - 2x \\ \frac{5x}{5} = \frac{20}{5} \quad \leftarrow \text{On divise par } 5 \text{ ou l'on multiplie par } 1/5 \\ x = 4 \quad \leftarrow \text{les deux membres de l'égalité } 5x = 20 \end{array}$$

Vérification : $3 \times 4 + 1 = 12 + 1 = 13$ $21 - 2 \times 4 = 21 - 8 = 13$

L'équation $3x + 1 = 21 - 2x$ admet une seule solution $x = 4$.

III) Résolution d'un problème

Corentin, Jean et Pierre se sont partagé 202 billes.

Corentin en a le triple de Pierre et Pierre en a 17 de moins que Jean.

Combien chacun a-t-il de billes ?

1^e étape : Choix de l'inconnue

On pose x le nombre de billes reçues par Pierre.

2^e étape : Traduction de l'énoncé et mise en équation.

Corentin reçoit $3x$ billes

Jean reçoit $x + 17$ billes

$$x + 3x + x + 17 = 202$$

3^e étape : On résout l'équation

$$5x + 17 = 202$$

$$5x = 202 - 17 = 185$$

$$x = \frac{185}{5} = 37$$

4^e étape : Retour à l'énoncé et réponses

Pierre a reçu 37 billes

Corentin a reçu $3 \times 37 = 111$ billes

Jean a reçu $37 + 17 = 54$ billes

Vérification : $37 + 111 + 54 = 202$