Fonctions affines

1. Définition

Etant donnés deux nombres a et b, on définit une fonction affine f lorsque, à tout nombre x, on associe le nombre a $\times$ x + b.

f : x → $f(x)$ = a $\times$ x + b

2. Exemples

a) Soit la fonction f : x → 3x + 1

Cela signifie qu'à un nombre x est associé le nombre 3x+1

Le nombre 3x + 1 est l'image du nombre x par la fonction f et est noté f(x)

$f(0)=3\times0+1=1 \quad f(-1)=3\times(-1)+1=-2 \quad f(1)=3\times1+1=4$

C'est une ***fonction affine***

b) Exemples et contre- exemples

Fonctions affines	Fonctions non affines
$f_2(x)=2{,}8x+7$ $f_4(x)=\dfrac{2}{3}-5x$ $f_5(x)=4x+1$	$f_1(x)=\dfrac{1}{x+2}$ $f_3(x)=2x^3+1$

3. Représentation graphique

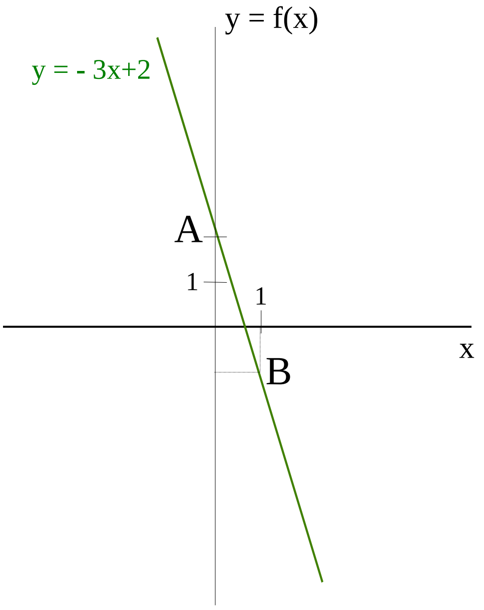
Dans un repère, la représentation graphique de la fonction affine f définie par f(x) = a x + b est une droite d'équation y = a x +b

a est le coefficient directeur et b l'ordonnée à l'origine

Exemple :

$f(x)=-3x+2 \quad f(o)=2 \quad f(1)=-1$

x	0	1
f(x) = - 3x + 2	2	-1



La représentation graphique de la fonction affine f est une droite qui a pour équation y = a x + b .

Pour déterminer une droite il faut deux points.

On choisit arbitrairement deux valeurs de x.

Pour x = 0 → y = 2 A(0 ; 2)

Pour x = 1 → y = -1 B(1 ; -1)

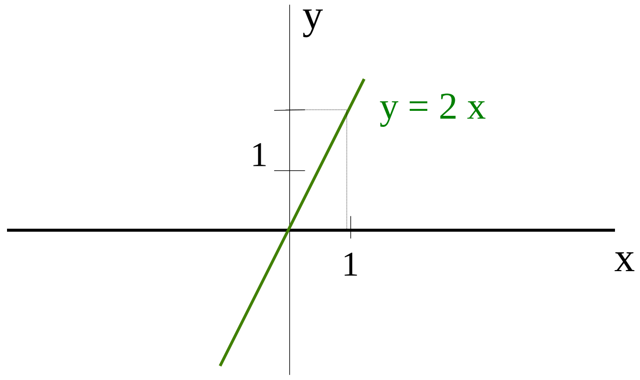
A(0 ; 2) et B(1 ; -1) sont deux points de la droite.

4. <u>Cas particuliers</u>

b = 0

f(x) = a x, donc f est une fonction linéaire de coefficient a.
Une fonction linéaire est une fonction affine et sa représentation graphique est une droite qui passe par l'origine.

<u>Exemple</u> : f (x) = 2 x

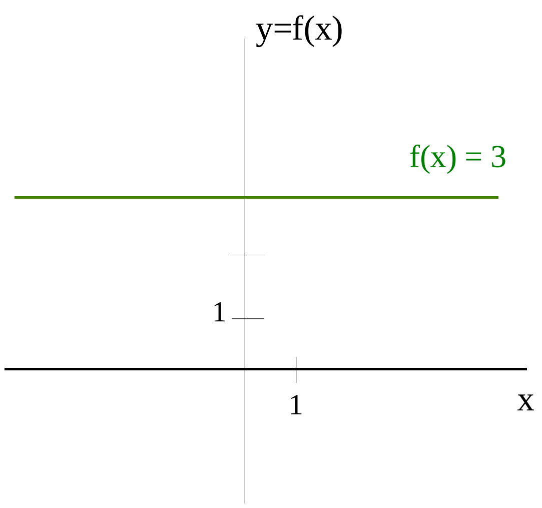


a= 0

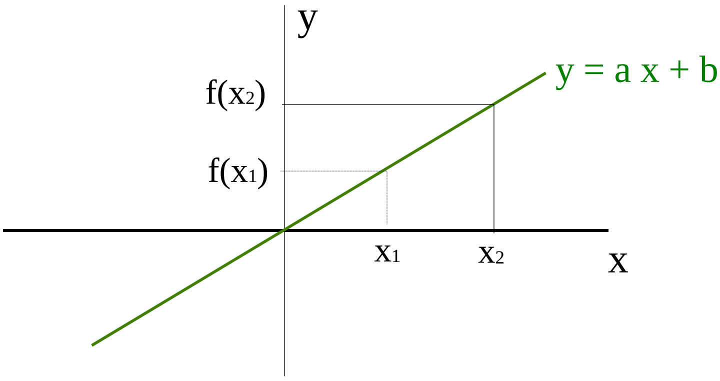
f(x) = b , à chaque nombre x, on associe constamment le même nombre fixe b.
La fonction f est appelée fonction constante.

La représentation graphique est une droite d'équation y = b, parallèle à l'axe des abscisses.

<u>Exemple</u> : f (x) = 3



5. <u>Proportionnalité des accroissements</u>



Soit f une fonction définie par f(x) = $a\,x + b$.
Lorsque x varie de x_1 à x_2, l'accroissement de x est $x_2 - x_1$
L'accroissement correspondant de l'image f(x) est $f(x_2) - f(x_1)$

Si f est une fonction définie par $f(x) = a\,x + b$, pour tous les nombres distincts x_1 et x_2 on a :

$$\boxed{a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad x_1 \neq x_2}$$

Les accroissements des valeurs de $f(x)$ sont **proportionnels aux accroissements des valeurs de x.**

<u>Démonstration</u> :
Soient f une fonction affine telle que f(x)=ax+b
Soit x_1 et x_2 deux nombres relatifs distincts.
On a donc $f(x_1)=ax_1+b$ et $f(x_2)=ax_2+b$
D'où $f(x_2)-f(x_1)=ax_2+b-(ax_1+b)= ax_2+b - ax_1-b= ax_2- ax_1=a(x_2-x_1)$
D'où $a = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ (« l'accroissement des f (x) divisé par l'accroissement de x »)

Cette propriété permet de calculer le nombre a connaissant deux nombres et leurs images.
<u>Exemple</u> : f est une fonction affine telle que : f(3)=6 et f(5)=12.

$$a = \frac{f(5) - f(3)}{5-3} = \frac{12-6}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

6. <u>Exemple : Déterminer une fonction affine</u>

Soit la fonction affine f tel que f(2) = 11 et f(-1) = 2.

Posons $f(x) = a\,x + b$

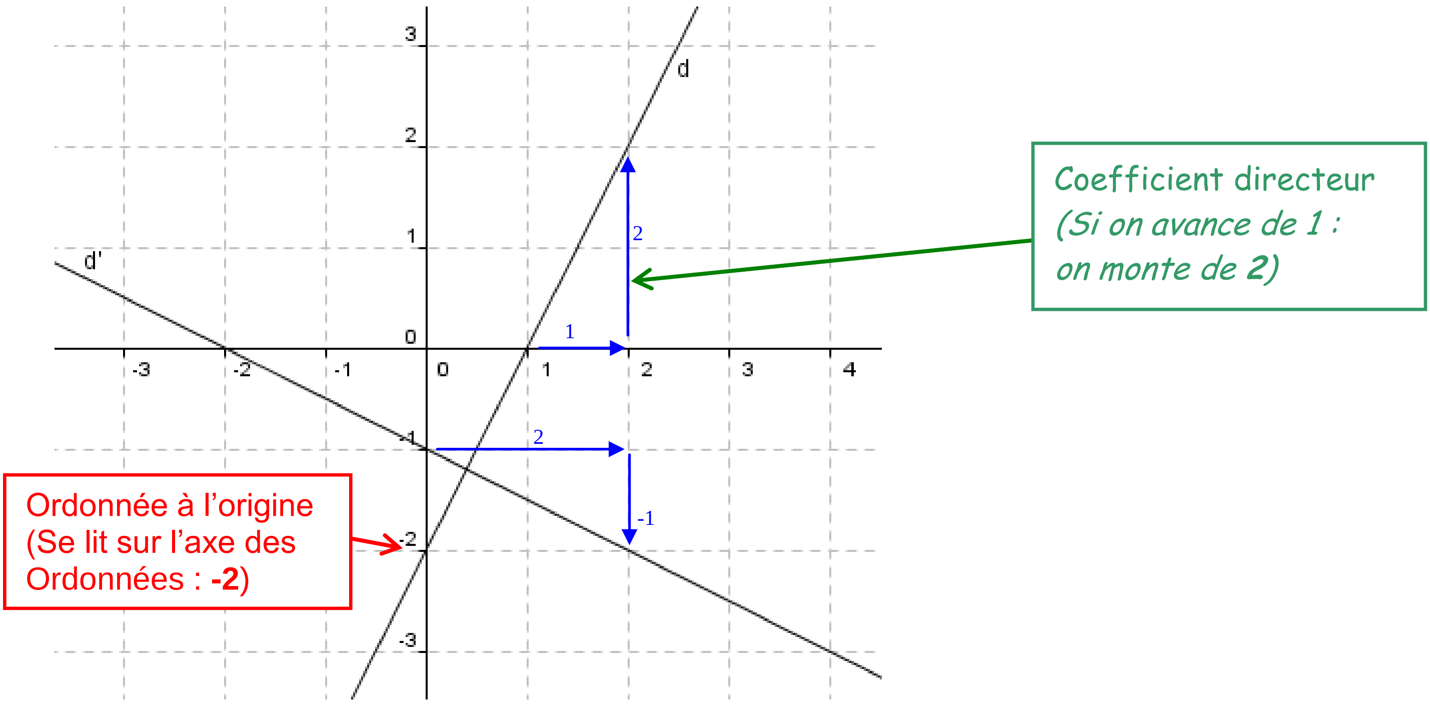
$$a = \frac{f(2) - f(-1)}{2-(-1)} = \frac{11-2}{2+1} = \frac{9}{3} = 3 \quad d'où \quad f(x) = 3x + b$$

De plus $f(2) = 11 \quad 3 \times 2 + b = 11 \quad 6 + b = 11 \quad b = 11 - 6 = 5$

La fonction affine cherchée est définie par $f(x) = 3\,x + 5$

7. Déterminer une fonction affine graphiquement

Déterminer les fonctions affines f et g dont les représentations graphiques sont les droites (d) et (d')



<u>Pour (d)</u> :
La droite (d) coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées (0 ;-2).
L'ordonnée à l'origine est - 2
L'accroissement des f(x) est 2 quand l'accroissement des *x* est 1 donc $a=\frac{2}{1}=2$
Le coefficient directeur est 2
L'équation de (d) est: $y=2x-2$ La fonction f est donc définie par $f:x\rightarrow 2x-2$

<u>Pour (d')</u> :
La droite (d') coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées (0 ;-1).
L'ordonnée à l'origine est -1

L'accroissement des f(x) est -1 quand l'accroissement des x est 2 donc $a=\frac{-1}{2}=-0,5$
Le coefficient directeur est – 0,5

L'équation de (d') : $y=-0,5x-1$ La fonction g est donc définie par $g:x\rightarrow -0,5x-1$