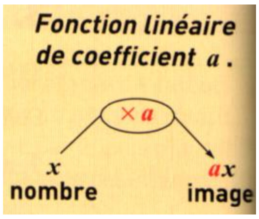
Fonctions linéaires

1. Définitions

a désigne un nombre relatif.
La fonction linéaire de coefficient a est la fonction qui, à un nombre associe le produit de ce nombre par a:



On note cette fonction f : $x \to$ a x
On dit que a x *est l'image de* x *et on note f(*x*) = a* x

Exemples :

a) La fonction linéaire de coefficient -3 se note $f : x \to -3x$
L'image du nombre x par la fonction f est le produit de x par -3.
On a donc f(x) = -3x

b) On considère la fonction linéaire de coefficient 2,5
Elle se note $f(x) = 2{,}5x$

Quelles sont les images de 4 ; 10 et 15 par cette fonction ?

Nombre	4	10	15
Image par f	10	25	37,5

$\times 2.5$

$f(4) = 2{,}5 \times 4 = 10$
$f(4) = 10$ donc l'image par f de 4 est 10, on note aussi $f : 4 \to 10$
de même on trouve $f(10) = 2{,}5 \times 10 = 25$ *et* $f(15) = 2{,}5 \times 15 = 37{,}5$

2. Propriétés

a. f est une fonction linéaire de coefficient a.
- L'image du nombre 0 par la fonction f est 0, c'est-à-dire f(0)= 0
- L'image du nombre 1 par la fonction f est a, c'est-à-dire f(1)= a

En effet : f(0)= $0 \times a$ = 0 et f(1)= $1 \times a$ = a

b. f est une fonction linéaire de coefficient a, avec a $\neq$ 0
Par cette fonction linéaire, tout nombre admet un et un seul antécédent.

Exemple : On cherche l'antécédent de -35 par la fonction linéaire f de coefficient 7. La fonction f est définie par f(x) = 7x

On cherche le nombre x tel que 7x = -35 d'où $x = \frac{-35}{7} = -5$

Donc -5 est le seul et unique antécédent de -35 par f.

3. Lien avec la proportionnalité

Toute situation de proportionnalité peut se traduire mathématiquement par une fonction linéaire dont le coefficient est le coefficient de proportionnalité.

Exemple

A vitesse constante, la distance est proportionnelle au temps.

Prenons comme vitesse **50 km/h**

Temps en heures	2	4,5	10
Distance en km	100	225	500

$\times 50$

Si d désigne la fonction linéaire on note : d : $x \to 50x$

L'image de x est d(x) = 50x

4. Propriétés des fonctions linéaires

f est une fonction linéaire. x_1 et x_2 désignent des nombres.

On a $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$

Exemple : la fonction linéaire f est telle que : f(3)=7,5 et f(5)=12,5

f(8) = f(3+5) =f(3) +f(5) = 7,5 +12,5 =20

f est une fonction linéaire. x et k sont des nombres.

On a $f(kx) = k\,f(x)$

Exemple : la fonction linéaire g est telle que : g(5)=11

g(15) = g(3×5)= 3$\times$g(5) = 3$\times$11 = 33

5. Déterminer une fonction linéaire

Déterminer la fonction linéaire f qui à 21 associe –7

21 a pour image –7 donc f(21) = -7. a est le coefficient de la fonction f.

$$-7 = a \times 21 \quad d'où \quad a = \frac{-7}{21} = -\frac{1}{3} \quad donc \quad f(x) = -\frac{1}{3}x$$

6. Représentation graphique

a. Propriété

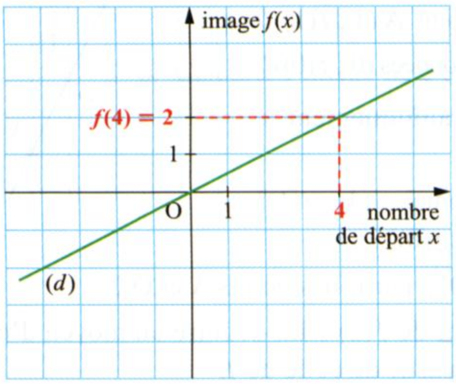
La représentation graphique d'une fonction linéaire de coefficient a dans un repère est une droite (d) passant par l'origine du repère.
Le nombre a s'appelle le coefficient directeur de la droite (d).

Remarques

- Cette droite passe par l'origine du repère O (0 ; 0) : a × 0 = 0
- Elle passe par le point de coordonnées (1 ; a) : si x = 1, y = a × 1 = a

Exemples :

Représentation graphique de $f : x \mapsto \frac{1}{2}x$.

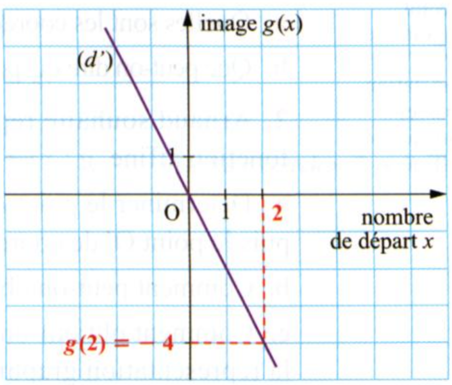


(d) est la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x$.

$f(0) = 0$ et $f(4) = \frac{1}{2} \times 4 = 2$.

La représentation graphique est une droite (d) passant par l'origine du repère. Pour tracer la droite (d), on détermine les coordonnées d'un deuxième point. Par exemple, f(4) = 2. La droite (d) passe par le point A(4 ;2). 0,5 est le coefficient directeur de la droite.

Représentation graphique de $g : x \mapsto -2x$.



(d') est la droite d'équation $y = -2x$.

$g(0) = 0$ et $g(2) = -2 \times 2 = -4$.

La représentation graphique est une droite (d') passant par l'origine du repère. Pour tracer la droite (d'), on détermine les coordonnées d'un deuxième point. Par exemple, g(2) = -4 donc la droite (d') passe par le point B (2 ;-4).

b. <u>Exemples</u>

Soit f une fonction linéaire tel que f(x) = ax et (d) la droite représentation graphique de f

Si le coefficient directeur est **positif** (a>0) la droite est **croissante.**

Si le coefficient directeur est **négatif** (a<0) la droite est **décroissante.**

$f_1(x) = -2x$

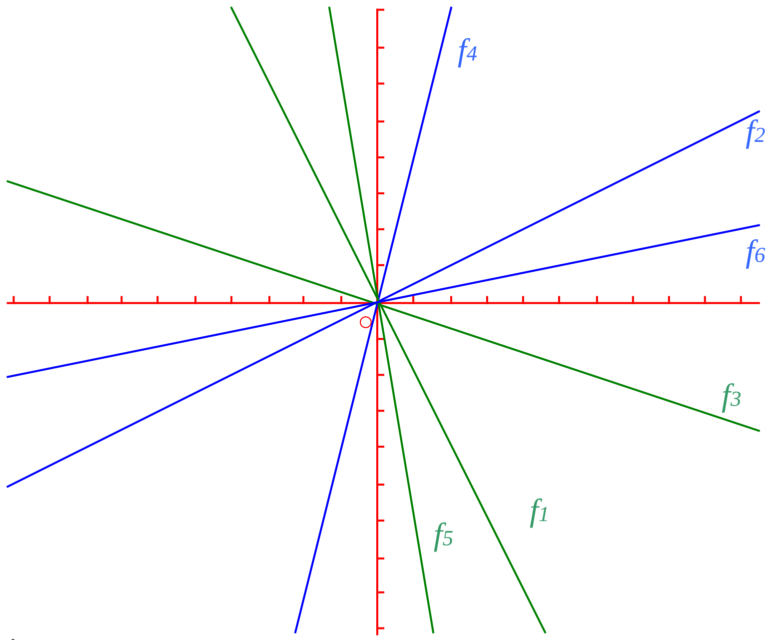
$f_2(x) = \frac{1}{2}x$

$f_3(x) = -\frac{1}{3}x$

$f_4(x) = 4x$

$f_5(x) = -6x$

$f_6(x) = \frac{1}{5}x$



<u>Interprétation graphique</u>

f est une fonction linéaire de coefficient a. x désigne un nombre. On a f(x+1) = f(x) + a

La droite (d) est la représentation graphique d'une fonction linéaire f.
Lorsqu'on augmente de 1 l'abscisse de x_M , alors l'ordonnée y_M augmente de a.
Sur le graphique ci-dessous, a = 0,5. Le coefficient directeur de la droite est donc 0,5.
Le coefficient de la fonction f est donc 0,5.