Inégalités – Inéquations

I. Introduction

Une **inéquation** à **une inconnue** est une inégalité dans laquelle un nombre inconnu est désigné par une lettre.

1) Exemple

$$\underbrace{2x-3}_{1^e \text{ membre}} < \underbrace{5}_{2^e \text{ membre}}$$

0 est-t-il solution de l'inéquation: $2\times0-3=-3<5$, oui 0 est solution de l'inéquation.
3 est-t-il solution de l'inéquation ? : $2\times3-3=6-3=3<5$, oui, 3 est solution de l'inéquation.

2) Définition

Résoudre une inéquation, c'est trouver toutes les valeurs numériques que l'on peut donner à x pour que l'inégalité soit vraie.
Ces valeurs numériques sont appelées les solutions de l'inéquation.

II. Inégalités

1) Addition et soustraction

-4 < 3 -4 + 5 < 3 + 5 1 < 8	-4 < 3 -4 – 5 < 3 – 5 -9 < -2	-4 < 3 4 + (-7) < 3 + (-7) -11 < -5	-4 < 3 -4 – (-2) < 3 – (-2) -2 < 5

Si on ajoute ou l'on soustrait un même nombre aux deux membres d'une inégalité, on ne change pas le sens de l'inégalité.

Quels que soient les nombres a, b et c :
Si a < b alors a + c < b + c
Si a < b alors a – c < b – c

Exemple : si x + 5 < 1 alors x + 5 – 5 < 1 – 5 d'où x < - 4

2) Multiplication et division

-3 < 2 -3 × 2 < 2 × 2 -6 < 4	-3 < 2 -3 × (-5) > 2 × (-5) 15 > -10	-3 < -1 -3 × (-2) > - 1 × (-2) 6 > 2	2 > 1 2 × (-3) < 1 × (-3) -6 < -3
	Changement de sens	Changement de sens	Changement de sens

Si on multiplie ou si on divise les deux membres d'une inégalité par un même nombre strictement positif, on ne change pas le sens de l'inégalité.
Si on multiplie ou si on divise les deux membres d'une inégalité par un même nombre strictement négatif, on change le sens de l'inégalité.

Quels que soient les nombres a, b et c :

$$Si\ \ a<b\ \ et\ \ c>0\quad alors\quad a\times c<b\times c\left(et\ \frac{a}{c}<\frac{b}{c}\right)$$

$$Si\ \ a<b\ \ et\ \ c<0\quad alors\quad a\times c>b\times c\left(et\ \frac{a}{c}>\frac{b}{c}\right)$$

Exemple :

Si $4x<12$ alors $\frac{4x}{4}<\frac{12}{4}$ d'où $x<3$

Si $-3x<15$ alors $\frac{-3x}{-3}<\frac{15}{-3}$ d'où $x>-5$

3) Opposés des nombres (Facultatif)

Si a < b alors -a > -b

Exemples : $\begin{array}{ccc} 4<5 & -2>-5 & -9<16 \\ -4>-5 & 2<5 & 9>-16 \end{array}$

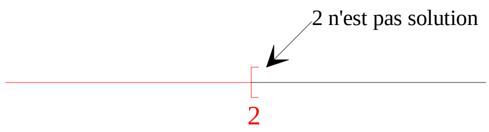
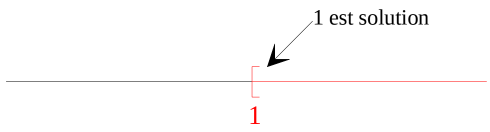
III. Méthode de résolution

1) La méthode consiste à « **isoler x** » dans un membre à l'aide des propriétés sur les inégalités.

Exemple 1	Exemple 2
$2x-3<5$ $2x-3+3<5+3$ $2x<8$ (: 2) $x<2$ Les solutions sont tous les nombres strictement inférieurs à 2	$5-3x\le 2$ (– 5) $-3x\le -3$ (: (-3)) $x\ge 1$ Les solutions sont tous les nombres supérieurs ou égaux à 1

2) Représentation graphique

Les solutions sont représentées en rouge

Exemple 1	Exemple 2
	

3) Autre exemple

$$3t - 4 < 7t + 16$$
$$3t - 7t < 16 + 4$$
$$-4t < 20$$
$$t > \frac{20}{-4} = -5$$

Représentation graphique

4) Résoudre des problèmes avec les inéquations

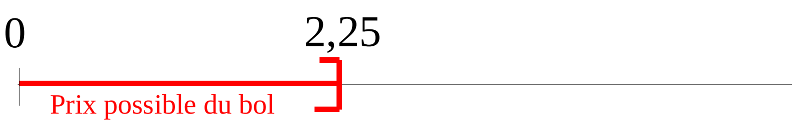
a) Marie veut acheter une théière qui coûte 28,5€, une boite à thé qui coûte 7€ et deux bols identiques. Elle se demande comment choisir le prix d'un bol pour pouvoir payer avec 2 billets de 20€.
Trouver la réponse à ce problème en posant une inéquation.

On pose x le prix d'un bol. L'inéquation qui doit être vérifiée est :

$$28,5 + 7 + 2x \leq 40$$
$$35,5 + 2x \leq 40$$
$$2x \leq 40 - 35,5$$
$$2x \leq 4,5$$
$$x \leq \frac{4,5}{2}$$
$$x \leq 2,25$$

Le prix d'un bol doit être inférieur ou égal à 2,25 €.

Représentation graphique



b) Au premier trimestre, Pierre a eu 7/20, 9/20 et 10/20 aux trois premiers devoirs de mathématiques. On appelle **n**, sa note du 4e devoir.
Pour quelles valeurs de n aura-t-il une moyenne supérieure à 11 ?

$$\frac{26}{4}+\frac{n}{4}>11$$

$$\frac{n}{4}>11-\frac{26}{4}$$

$$\frac{n}{4}>11-6,5$$

$$\frac{n}{4}>4,5$$

$$n>4\times4,5$$

$$n>18$$

Pierre doit obtenir une note supérieure à 18/20

<u>Représentation graphique</u>