

Nombre rationnels : égalité de fractions, comparaison, proportion

I) Ecritures fractionnaires égales

1) Propriété

Si l'on multiplie le numérateur et le dénominateur d'une écriture fractionnaire par un même nombre, on obtient une écriture fractionnaire égale.

Soient $a, b \neq 0, k \neq 0$ trois nombres : $\frac{k \times a}{k \times b} = \frac{a}{b}$

2. Exemples : $\frac{4}{5} = \frac{4 \times 2}{5 \times 2} = \frac{8}{10}$; $\frac{21}{35} = \frac{7 \times 3}{7 \times 5} = \frac{3}{5}$.

3. Application : simplification d'écritures fractionnaires :

a) Simplifier une fraction, c'est diviser son numérateur et son dénominateur par un même nombre entier. Lorsqu'une fraction n'est plus simplifiable, on dit qu'elle est la plus simple possible ou **irréductible**.

b) Critères de divisibilité (Rappels)

Un nombre est divisible par		Exemples
2	Si le nombre est pair ou si son dernier chiffre est 0; 2; 4; 6;8	24 : le dernier chiffre est 4
3	Si la somme de ses chiffres est divisible par 3	201 : $2 + 0 + 1 = 3$ 132 : $1 + 2 + 3 = 6$
4	Lorsque le nombre formé par son chiffre des dizaines et son chiffre des unités est divisible par 4	136 est divisible par 4 car 36 est divisible par 4 $36 = 9 \times 4$
5	Si le dernier chiffre est 0 ou 5	65 : le dernier chiffre est 5
9	Si la somme de ses chiffres est divisible par 9	702 : $7 + 0 + 2 = 9$ 981 : $9 + 8 + 1 = 18$; $1 + 8 = 9$
10	Si le dernier chiffre est 0	20 : le dernier chiffre est 0

c) Exemples

$$\frac{12}{18} = \frac{2 \times 6}{3 \times 6} = \frac{2}{3} ; \frac{128}{38} = \frac{2 \times 64}{2 \times 19} = \frac{64}{19} ; \frac{462}{546} = \frac{231 \times 2}{273 \times 2} = \frac{231}{273} = \frac{77 \times 3}{91 \times 3} = \frac{77}{91} = \frac{7 \times 11}{7 \times 13} = \frac{11}{13}$$

II) Division décimale

Exemple : diviser 4,48 par 1,4

Si le diviseur est un nombre à virgule, on le transforme en nombre entier en le multipliant, ainsi que le dividende, par 10, 100 ou 1000.

$$\frac{4,48}{1,4} = \frac{44,8}{14}$$

On pose la division $44,8 \div 14$.

$$44,8 \div 14 = 4,48 \div 1,4 = 3,2$$

III) Comparer des écritures fractionnaires

1) Écritures fractionnaires de même dénominateur

De deux écritures fractionnaires de *même dénominateur* la plus grande est celle qui a le plus grand numérateur.

Exemples :

$$\frac{17}{19} \text{ et } \frac{15}{19} : 17 > 15 \text{ donc } \frac{17}{19} > \frac{15}{19}$$

2) Écritures fractionnaires de même numérateur

De deux écritures fractionnaires de *même numérateur* la plus grande est celle qui a le plus petit dénominateur.

Exemple

$$\frac{19}{17} \text{ et } \frac{19}{15} : 17 > 15 \text{ donc } \frac{19}{15} > \frac{19}{17}$$

3) Autres cas

En écriture fractionnaire, pour comparer 2 nombres lorsque le numérateur et le dénominateur sont différents :

- On commence par les écrire avec le même dénominateur.
- On compare les numérateurs

a) Comment comparer $\frac{17}{20}$ et $\frac{4}{5}$?

$$\frac{4}{5} = \frac{4 \times 4}{5 \times 4} = \frac{16}{20}$$

b) Ranger les écritures fractionnaires dans l'ordre croissant

$$\frac{7}{12} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{5}{12} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{5}{6} \quad \frac{1}{2}$$

$$\frac{7}{12} \quad \frac{3}{4} = \frac{9}{12} \quad \frac{5}{12} \quad \frac{2}{3} = \frac{8}{12} \quad \frac{5}{6} = \frac{10}{12} \quad \frac{1}{2} = \frac{6}{12}$$

$$\frac{5}{12} < \frac{1}{2} < \frac{7}{12} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{5}{6} < \frac{5}{6}$$

4) Comparer une écriture fractionnaire à 1 :

Si dans une écriture fractionnaire, le numérateur est plus grand que le dénominateur, alors cette écriture fractionnaire est supérieure à 1.

Exemples : $15 > 14$ donc $\frac{15}{14} > 1$;

Utilisation :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{13}{10} \text{ et } \frac{2}{3} \\ \frac{13}{10} > 1 \\ \frac{2}{3} < 1 \end{array} \right\} \text{ donc } \frac{13}{10} > \frac{2}{3}$$
$$\left. \begin{array}{l} \frac{3}{2} \text{ et } \frac{4}{5} \\ \frac{3}{2} > 1 \\ \frac{4}{5} < 1 \end{array} \right\} \text{ donc } \frac{3}{2} > \frac{4}{5}$$

IV) Proportion

Une proportion peut s'exprimer sous forme d'une fraction, d'un nombre décimal ou d'un pourcentage

Exemple

Dans une classe de 5^e, il y a 18 filles sur un total de 30 élèves.

On dit que la **proportion** de filles dans cette classe est égale à : $\frac{\text{nombre de filles}}{\text{nombre total d'élèves}} = \frac{18}{30}$.

On dit aussi que cette proportion est de **0,6** car $\frac{18}{30} = 0,6$.

Comme $0,6 = \frac{60}{100}$, on dit aussi que cette proportion est de $\frac{60}{100}$ ou **60 %**.