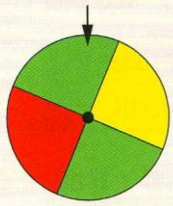
Probabilités

On réalise les trois expériences suivantes.

On lance une pièce de monnaie équilibrée et on regarde sa face supérieure.	On lance un dé à 6 faces équilibré et on regarde le nombre de points inscrits sur sa face supérieure.	On fait tourner une roue de loterie équilibrée, on attend qu'elle se stabilise et on regarde la couleur désignée par la flèche.
		

I) Vocabulaire et probabilités

1) Issues

Chacun des résultats possibles d'une expérience est une issue de l'expérience.

La pièce de monnaie	Le dé à 6 faces	La roue de loterie
Cette expérience admet 2 issues : pile et face.	Cette expérience admet 6 issues : 1, 2, 3, 4, 5 et 6.	Cette expérience admet 3 issues : vert, rouge et jaune.

2) Evènements

Un évènement est une condition qui peut être, ou ne pas être, réalisée lors d'une expérience.

Un évènement peut être réalisé par une ou plusieurs issues de cette expérience.

Un évènement réalisé par une seule issue est un évènement élémentaire.

La pièce de monnaie	Le dé à 6 faces	La roue de loterie
« *on obtient pile* » est un événement élémentaire.	• « *on obtient un nombre pair* » est un événement réalisé par les issues 2, 4 et 6. • « *on obtient 4* » est un événement élémentaire.	• « *la flèche désigne une couleur primaire* » est un événement réalisé par deux issues : rouge et jaune. • « *la flèche désigne le jaune* » est un événement élémentaire.

3) Expérience aléatoire

Une expérience est dite aléatoire lorsque chaque issue ne dépend pas des issues des expériences précédentes.

La pièce de monnaie	Le dé à 6 faces	La roue de loterie
Pour chacune des expériences ci-dessus, chaque issue ne dépend pas des issues précédentes. Donc, ces expériences sont des expériences aléatoires.		

Une expérience aléatoire est uniquement due **au hasard**.

Une expérience aléatoire peut être réalisée **autant de fois que l'on veut**, dans les mêmes conditions.

II) Notions de probabilités

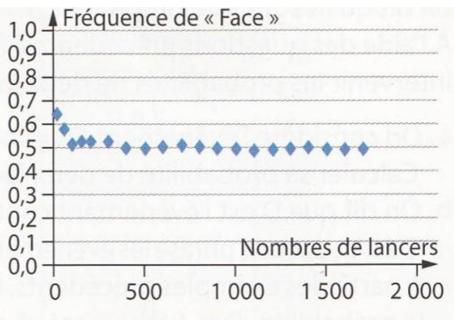
1) Définition

Lorsqu'on effectue **un très grand nombre de fois une expérience aléatoire**, la fréquence de réalisation d'un évènement se rapproche d'une « fréquence théorique » appelée **probabilité**.

La pièce de monnaie	Le dé à 6 faces	La roue de loterie
Si on lançait la pièce un très grand nombre de fois, on obtiendrait pile environ une fois sur deux.	Si on lançait le dé un très grand nombre de fois, on obtiendrait 4 environ une fois sur six.	Si on faisait tourner la roue de loterie un très grand nombre de fois, on obtiendrait vert environ une fois sur deux.

Exemple

On a lancé un grand nombre de fois une pièce de monnaie équilibrée. On constate que la fréquence de « Face » se stabilise autour de 0,5, ce qui est bien la probabilité d'obtenir « Face ».

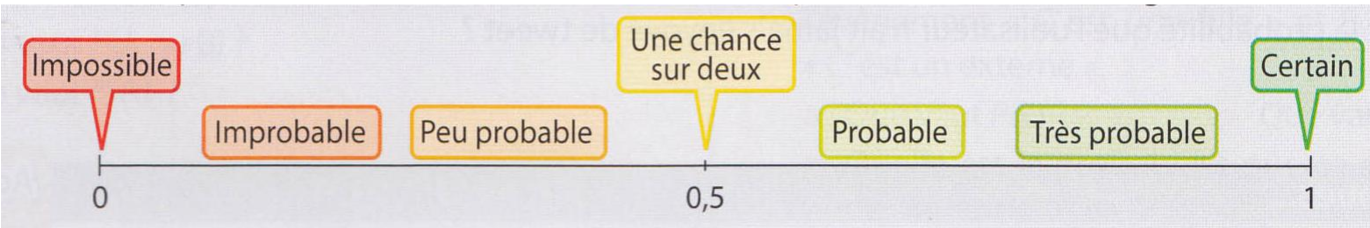


2) Notation

Soit **A un évènement**, on note **p(A)** la probabilité que l'évènement A se réalise.

3) Propriétés

Une probabilité est un nombre compris entre 0 et 1
Un évènement dont la probabilité est nulle est un évènement impossible.
Un évènement dont la probabilité est égale à 1 est un évènement certains.
La somme des probabilités de tous les évènements élémentaires est égale à 1



Exemple

Lorsqu'on lance un dé, « Obtenir 7 » est un évènement impossible et « Obtenir un numéro entre 1 et 6 » est un évènement certain.

III) Equiprobabilité

1) Définition

Lorsque tous les évènements élémentaires ont la même probabilité d'être réalisées, on dit qu'il s'agit d'une situation d'équiprobabilité.

Dans une situation d'équiprobabilité, tous les évènements élémentaires ont la même probabilité.

La pièce de monnaie	Le dé à 6 faces	La roue de loterie
On a autant de chance d'obtenir pile que face ; il s'agit d'une situation d'équiprobabilité.	On a autant de chance d'obtenir 1, que 2, que 3, que 4, que 5, que 6 ; il s'agit d'une situation d'équiprobabilité.	On a deux fois plus de chance d'obtenir vert que rouge ; il ne s'agit pas d'une situation d'équiprobabilité.

2) Propriété

On désigne par n le nombre d'issues d'une expérience aléatoire
Dans une situation d'équiprobabilité, la probabilité d'un évènement élémentaire est égale $\frac{1}{n}$

La pièce de monnaie	Le dé à 6 faces	La roue de loterie
On considère l'événement élémentaire : F : « *on obtient face* ». On a $p(\text{F}) = \frac{1}{2}$.	On considère l'événement élémentaire : N : « *on obtient le nombre 4* ». On a $p(\text{N}) = \frac{1}{6}$.	On considère l'événement élémentaire : V : « *on obtient le vert* ». On a $p(\text{V}) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

3) Exemple

On fait tourner une roue équilibrée et divisée en huit secteurs de même aire.
les issues 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, sont équiprobables

La probabilité de chacune d'entre elles vaut $\frac{1}{8} = 0{,}125$, soit 12,5 %

IV) Déterminer la probabilité d'un évènement

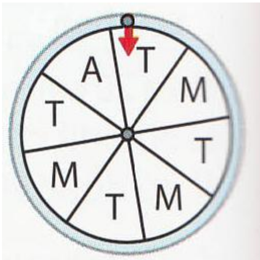
1) Définition et propriété

Selon le résultat d'une expérience aléatoire, on dit qu'un **évènement** est réalisé ou non.
la probabilité d'un évènement est égale à **la somme** des probabilités des issues qui le réalisent. C'est un nombre compris entre **0 et 1 .**

Exemple

On fait tourner la roue ci-contre divisée en huit secteurs de même aire
Quelle est la probabilité d'obtenir une consonne ?

On note C l'évènement « obtenir une consonne »



$$P(C) = P(M) + P(T) = \frac{3}{8} + \frac{4}{8} = \frac{7}{8}$$

2) Propriété

Dans une expérience aléatoire où toutes les issues sont **équiprobables**, la probabilité d'un évènement A est égale à :

$$P(A) = \frac{\text{nombre d'issues qui réalisent l'évènement } A}{\text{nombre total d'issues}}$$

Exemple

On lance un dé cubique équilibré, on a 6 issues équiprobables : 1, 2, 3, 4, 5, 6
On note A l'évènement « obtenir un nombre plus grand que 4 »
Quelle est la probabilité d'obtenir l'évènement A ?

$$P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

3) Définition et propriété

On dit que deux évènements sont **incompatibles** s'ils ne peuvent pas se réaliser en même temps.

Exemple *

Lorsqu'on lance un dé cubique, les évènements A : « obtenir un numéro strictement inférieur à 2 » et B : « obtenir un numéro strictement supérieur à 4 » ne peuvent pas se réaliser en même temps. **A et B sont incompatibles**
En revanche, les évènements C : « obtenir un multiple de 3 » et D : « obtenir un nombre pair » ne sont pas incompatibles. En effet, si le résultat du dé est 6, les deux évènements C et D sont réalisés en même temps.

4) Propriété

Si deux évènement A et B sont incompatibles alors P(A ou B) = P(A) + P(B)

Exemple : (on reprend l'exemple précédent *)
Quelle est la probabilité d'obtenir l'évènement «obtenir un numéro strictement inférieur à 2 ou obtenir un numéro strictement supérieur à 4 » ?

$$P(AouB) = P(A) + P(B) = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

5) Définition

L'évènement contraire d'un évènement A est l'évènement qui se réalise lorsque A n'est pas réalisé. On le note $\bar{A}$.

Exemple **

Au grenier se trouve un carton contenant des boules de Noël. Il y a trois boules rouges, 2 vertes et 4 bleues.
Marine monte au grenier sans lumière et prend une boule au hasard dans le carton pour décorer le sapin.
L'évènement contraire de l'évènement A : « obtenir une boule bleue » est l'évènement $\bar{A}$: « ne pas obtenir une boule bleue » ne peuvent pas se réaliser en même temps.

6) Propriété

La somme d'un évènement et de son contraire est égale à 1 : $\boxed{P(A)+P(\bar{A})=1}$

Remarque(on reprend l'exemple précédent **)

O peut déduire que : $P(\bar{A})=1-P(A)$

Exemple

Quelle est la probabilité que Marine ne prenne pas une boule bleue ?

$$P(\bar{A})=1-P(A)=1-\frac{4}{9}=\frac{9}{9}-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$$

La probabilité que Marine ne prenne pas une boule bleue est égale $\frac{5}{9}$