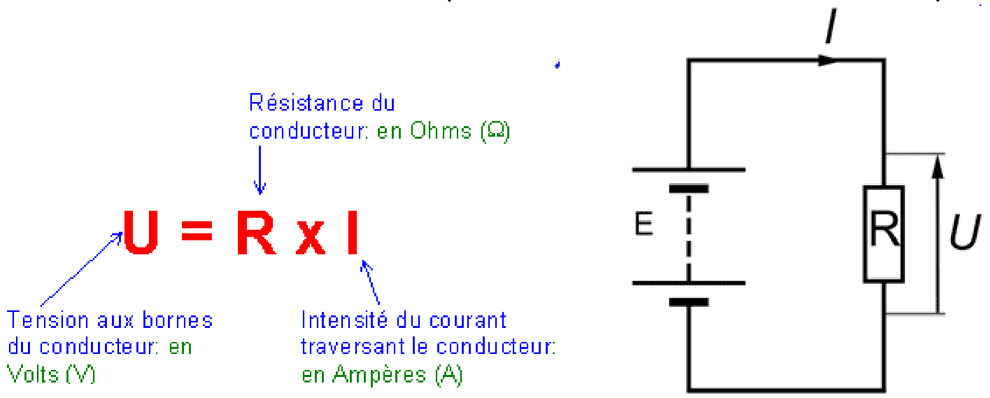
Proportionnalité et grandeurs composées

I. Situation de proportionnalité

1. Exemple 1

La loi d'ohm établit une relation entre la valeur d'une résistance, la tension qu'elle reçoit et l'intensité du courant qui circule dans un circuit électrique.



Voici les résultats d'une série de mesures :

I : intensité en ampères	2	3	5	6,3
U : tension en volts	10	15	25	31,5

$\times 5$

$$\frac{10}{2} = \frac{15}{3} = \frac{25}{5} = 5$$

Tous les quotients sont égaux à 5, donc c'est un tableau de proportionnalité et le nombre 5 est le coefficient de proportionnalité.

La loi d'Ohm est vérifiée et la résistance est de 5 ohms

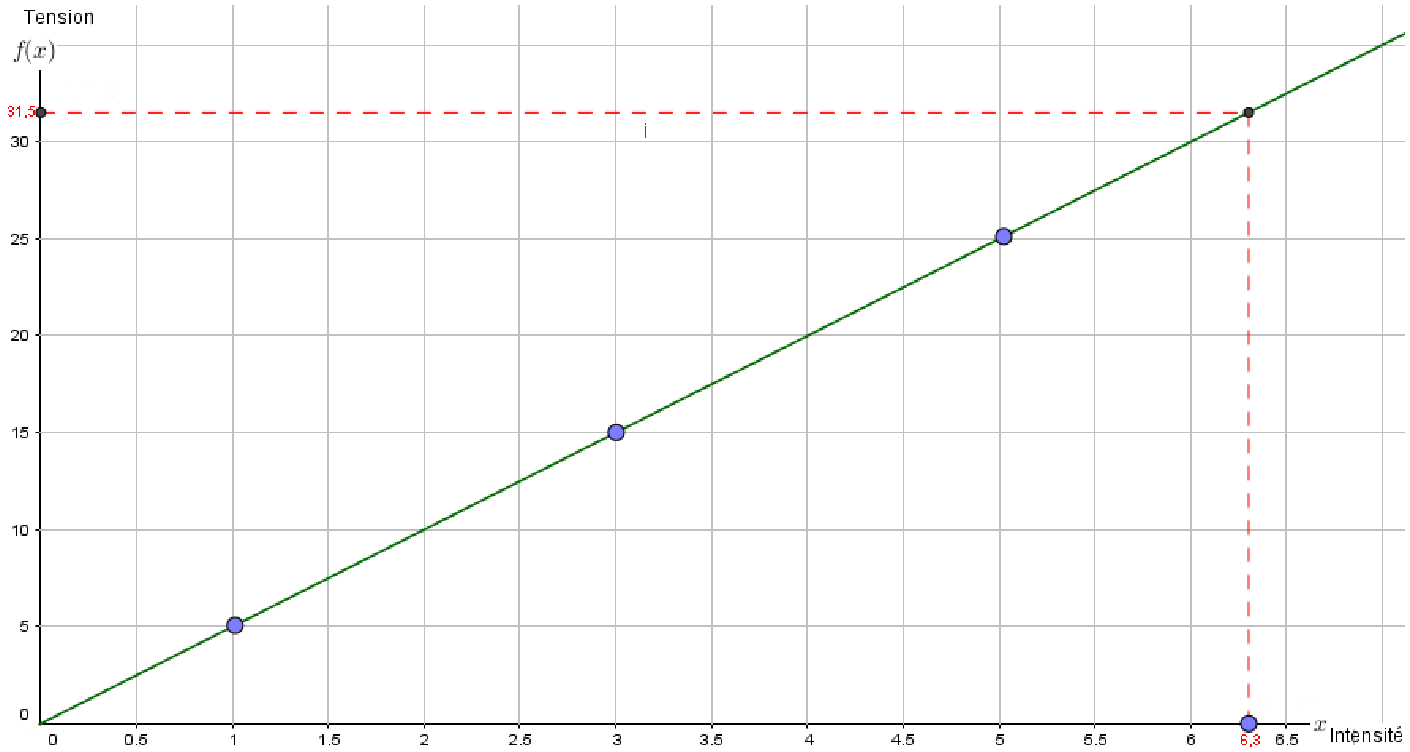
Quelle est la tension pour une mesure de 6,3 A ? **31,5 V**

6,3 $\times$ 5 = 31,5

Il y a proportionnalité quand on obtient les termes de la deuxième ligne en multipliant ceux de la première ligne par un même nombre.

Ce nombre s'appelle le *coefficient de proportionnalité.*

2. Représentation graphique



Il y a proportionnalité quand tous les points sont alignés avec l'origine.

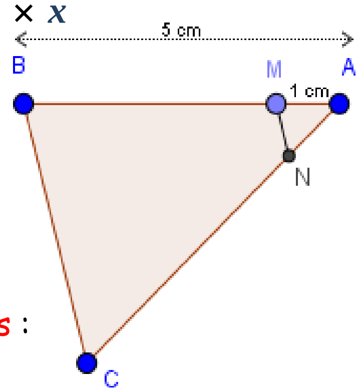
3. formule générale

Une formule représente une situation de proportionnalité entre deux grandeurs x et y lorsqu'il existe un nombre a tel que $y = a \times x$

a : coefficient de proportionnalité

Exemple : y : tension (en V) x : intensité (en A) $y = 5 \times x$

4. Exemple 2



On considère le figure suivante telle que :
ABC triangle avec M∈ [AB], N ∈[AC] et (MN) // (BC).
MA = 1 cm et AB = 5 cm

On peut décrire cette figure de plusieurs manières équivalentes :

- Les longueurs des côtés des triangles ABC et AMN sont proportionnelles

AB	AC	BC
AM	AN	MN

$\times \frac{1}{5}$

- Le triangle AMN est une réduction du triangle ABC dans le rapport $\frac{1}{5}$
- Les triangles AMN et ABC forment une configuration de Thales

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} = \frac{1}{5}$$

- Le triangle AMN est l'image du triangle ABC par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{5}$

II. Augmentation ou diminution en pourcentages

1. Augmentation en pourcentage

a. Exemple

On place un capital de 5000€ au taux de 4 %. Quel est le nouveau capital au bout d'un an ?

Intérêts au bout d'un an : $5000\times\frac{4}{100}=200€$

Capital accumulé au bout d'un an : $5000+200=5200€$

b. Généralisation

On place un capital de x € au taux de 4 %.

Quel est le nouveau capital y au bout d'un an ?

Intérêts au bout d'un an : $x\times\frac{4}{100}€$

Capital accumulé au bout d'un an : $y=x+x\times\frac{4}{100}=x\left(1+\frac{4}{100}\right)=x\times1{,}04€$

Donc y = 1,04 x (*fonction linéaire*)

c. Bilan

Si on augmente la valeur x de t %on obtient un nombre y tel que : $\boxed{y=\left(1+\frac{t}{100}\right)\times x}$

2. Diminution en pourcentage

a. Exemple

Dans une ville, la population diminue de 3% par an.
Au 1^{e} janvier 2015, il y a 25 000 habitants.
Nombre d'habitants au 1^{e} janvier 2016 ?

Nombre d'habitants en moins en fin d'année : $25000\times\frac{3}{100}=750$

Nombre d'habitants au 1^{e} janvier : 25000 - 750 = 24250

b. Généralisation

On suppose qu'une ville a un nombre x d'habitants à une date donnée.
Soit y le nombre d'habitants de cette ville un an plus tard.

Nombre d'habitants en moins en fin d'année: $x \times \frac{3}{100}$

Nombre d'habitants au 1^e janvier : $y = x - x \times \frac{3}{100} = x\left(1 - \frac{3}{100}\right) = x \times 0{,}97$

Donc $y = 0{,}97\,x$ (*fonction linéaire*)

c. Bilan

Si on diminue la valeur x de t % on obtient un nombre y tel que : $y = \left(1 - \frac{t}{100}\right) \times x$

3. Bilan

Prendre un pourcentage d'une quantité, augmenter ou diminuer une quantité d'un pourcentage sont des situations de proportionnalité.

On peut les modéliser par des fonctions linéaires.

	Prendre 5% de x, c'est multiplier x par 0,05	Augmenter de 5%, c'est multiplier x par 1,05	Diminuer x de 5%, c'est multiplier x par 0,95
Expression littérale	$\frac{5}{100}x = 0{,}05\,x$	$x + \frac{5}{100}x = \left(1 + \frac{5}{100}\right)x = 1{,}05\,x$	$x - \frac{5}{100}x = \left(1 - \frac{5}{100}\right)x = 0{,}95\,x$
Fonction linéaire : f	$f(x) = 0{,}05\,x$	$f(x) = 1{,}05\,x$	$f(x) = 0{,}95\,x$

Exemples

Un abonnement à 60 € augmente de 2,5 %.
Le nouveau montant est :
$60\text{ €} \times \left(1 + \frac{2{,}5}{100}\right) = 60\text{ €} \times 1{,}025 = 61{,}50\text{ €}$

Un article coûtait 150 €. Après une réduction de 60 %, il est vendu :
$150\text{ €} \times \left(1 - \frac{60}{100}\right) = 150\text{ €} \times 0{,}4 = 60\text{ €}$

III. Les grandeurs composées

a. Grandeurs quotients

Le quotient de deux grandeurs de natures différentes donne une nouvelle grandeur dite grandeur quotient.

Applications

- Vitesse : $km/h = km \cdot h^{-1}$

Une moto met 1h15 pour faire 200 km. Quelle est la vitesse moyenne ?

$$V = \frac{Distance}{Temps} = \frac{200km}{1,25h} = 160\, km/h$$

- Consommation d'essence : $L/km = L \cdot km^{-1}$

Un automobiliste consomme 27 L pour faire 300 km. Quelle est sa consommation ?

$C = \frac{27L}{300km} = 0,09\, L/km$ donc il faut 9 litres pour 100 km

- Débit : $m^3/s = m^3 \cdot s^{-1}$

Pour remplir un seau de10 l, il faut 20 s. Quel est le débit du robinet ?

$10\,l = 10\,dm^3$ $\qquad D = \frac{10dm^3}{20s} = 0,5\, dm^3/s$

b. Grandeurs produits

Le produit de deux grandeurs de natures différentes donne une nouvelle grandeur dite grandeur produit.

Application :

Energie électrique $E = P \times t$

Quel est la consommation d'un téléviseur de 180W pendant 3h ?

E = 180 W $\times$ 3 h = 540 W. h