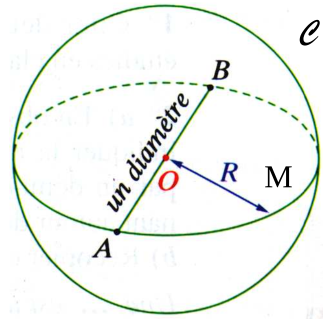
Solides : sections et volume d'une boule

I. Sphères et boules

a. Définition d'une boule

Une boule de centre O et de rayon R est l'ensemble des points de l'espace tels que OM $\leq$ R

Exemple : cette sphère a pour centre O et pour rayon R.



- [AB] est un diamètre de la sphère
- Les points A et B sont ***diamétralement opposés***
- Le cercle 𝒞 ***est un grand cercle de la sphère.***

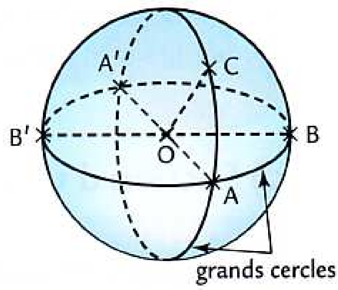
b. Remarques

- Un **diamètre** de la sphère est un segment qui joint deux points de la sphère et qui passe par son centre O.
- Toute droite passant par le centre d'une sphère coupe celle-ci en deux points *diamétralement opposés.*
- Un cercle de centre O et de rayon R s'appelle **un grand cercle de la sphère**.

Exemple :

Les points appartenant à une sphère sont représentés sur des cercles de la sphère de centre O appelés **grands cercles.**

[OB] et [OC] sont deux rayons de la sphère, donc OB = OC.



La boule est un solide. Ce terme désigne à la fois la surface et l'intérieur du solide.

II. Aire et volume

1. Aire d'une sphère

L'aire *A* d'une sphère de rayon R est : $A = 4 \times \pi \times R^2 = 4\pi R^2$

Calculer au *millimètre près*, le rayon d'une sphère d'aire 20cm².

$$4\pi R^2 = 20 \quad d'où \quad R^2 = \frac{20}{4\pi} = \frac{5}{\pi} \quad donc, comme \quad R > 0 \quad R = \sqrt{\frac{5}{\pi}} \approx 1{,}3cm$$

2. Volume d'une boule

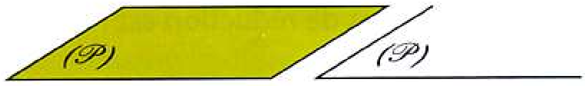
Le volume *V* d'une boule de rayon R est : $V = \frac{4}{3} \times \pi \times R^3 = \frac{4}{3}\pi R^3$

Calculer le volume V d'une boule de diamètre 10 cm.

$$R = \frac{D}{2} = \frac{10}{2} = 5cm \quad d'où \quad V = \frac{4}{3} \times \pi \times 5^3 \approx 523{,}6cm^3$$

III. Sections de solides par un plan

Pour avoir une représentation d'un plan, on peut, par exemple,
Imaginer une plaque métallique très fine et rigide dont on peut indéfiniment augmenter les dimensions.
Un plan est souvent représenté ainsi.

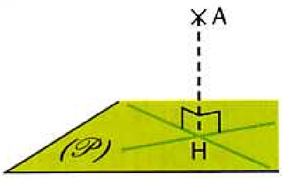


1. Intersection

L'intersection d'un plan et d'un solide est appelée section du solide par ce plan.

2. Distance d'un point à un plan

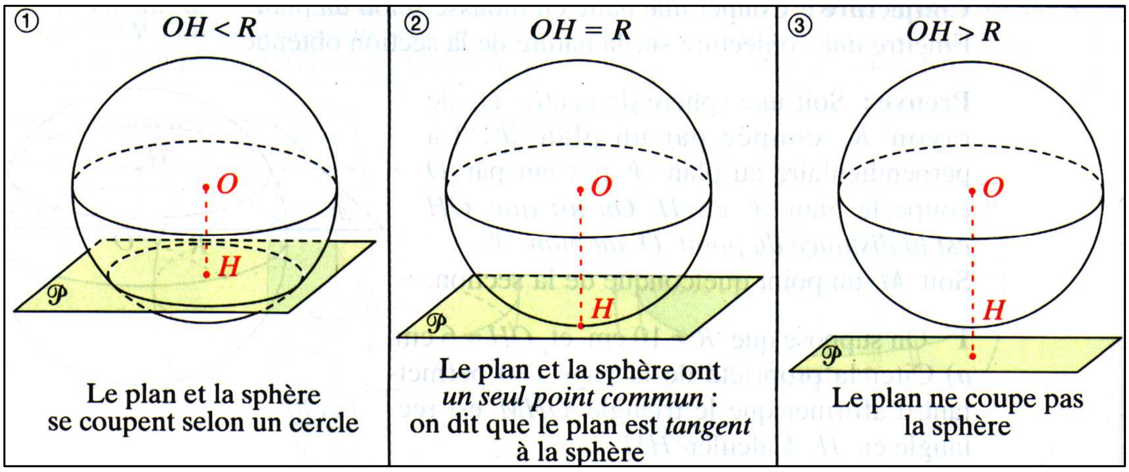
La distance d'un point A à un plan (*P*) est la distance AH où H est le point d'intersection du plan (*P*) et de la droite perpendiculaire à ce plan passant par A.



IV. Section d'une sphère par un plan

Soit un plan (*P*) et une sphère de centre O, de rayon R.
Soit *H* le point du plan *(P)* tel que la droite (OH) soit perpendiculaire au plan (*P*).

Trois cas possibles :



1. Théorème (admis)

La section d'une sphère par un plan est un cercle (cas 1 ci-dessus).

Cas particulier

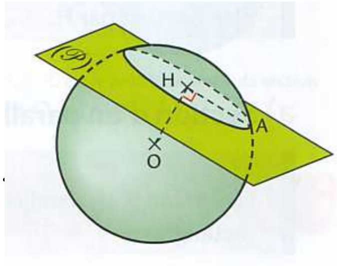
La section d'une sphère par un plan passant par le centre de la sphère est appelé *grand cercle* de la sphère : son rayon est égal à celui de la sphère.

2. <u>Propriété</u>

La droite qui joint le centre du cercle de section et le centre de la sphère est perpendiculaire au plan de section.

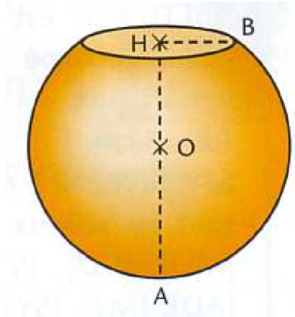
O est le centre de la sphère et H le centre de la section :

- (OH) est perpendiculaire à *(P)*
- (OH) est perpendiculaire à (AH)
- (OH) est perpendiculaire à tous les rayons du cercle de section.
- OH est la distance de O au plan *(P)*



<u>Exemple : Calculer la longueur d'un segment dans l'espace</u>

La figure ci-contre représente une sphère « sectionnée » de centre O et de rayon 5 cm. H est le centre du cercle de section.
On sait que OH = 4cm. **Calculer HB.**



HBO est un triangle rectangle en H, d'après le théorème de Pythagore

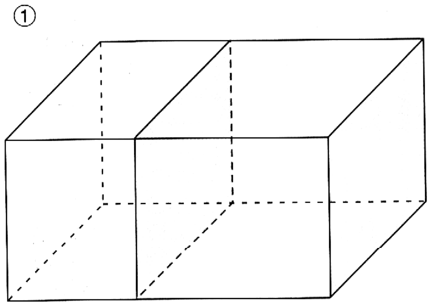
$HB^2 = OB^2 - OH^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9$ d'où $HB = \sqrt{9} = 3$

donc **HB = 3cm**

V. <u>Section d'un pavé droit</u>

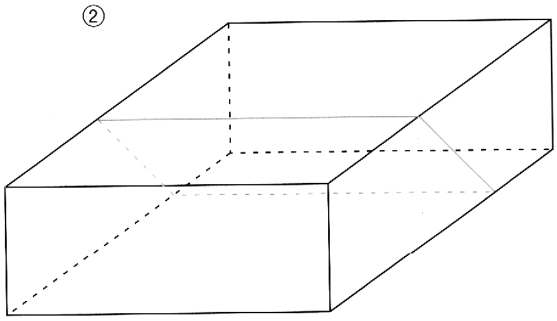
Propriétés (admises)

①



La section d'un parallélépipède rectangle par un plan parallèle à une face est un rectangle superposable à cette face. (C'est, évidemment, un carré dans le cas du cube.)

②



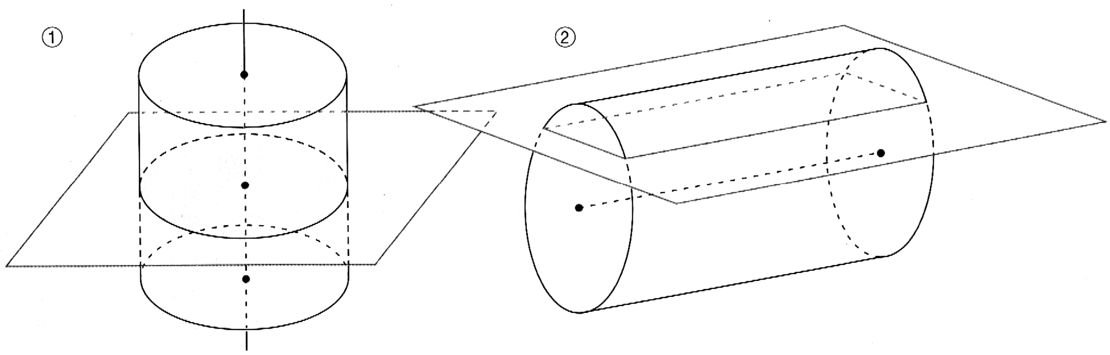
La section d'un parallélépipède rectangle par un plan parallèle à une arête est un rectangle (dont une dimension est la longueur de cette arête).

<u>Cas particulier</u> :

La section d'un cube par rapport à un plan parallèle à une face est un carré.

VI. Section d'un cylindre de révolution

Propriétés (admises)



La section d'un cylindre de révolution par un plan perpendiculaire à son axe est un disque superposable aux disques de base.

La section d'un cylindre de révolution par un plan parallèle à son axe est un rectangle (dont une des dimensions est la hauteur du cylindre).

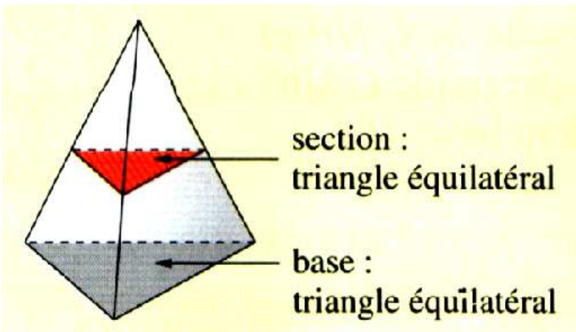
Dans le cas ①, le plan est parallèle aux bases.

Dans le cas ②, si le plan contient l'axe du cylindre, l'autre dimension du rectangle est le diamètre du cylindre.

VII. Section d'une pyramide ou d'un cône de révolution

1) Pyramide

La section d'une pyramide par un plan parallèle à sa base est un polygone de même nature que le polygone de base.



2) Cône de révolution

La section d'un cône de révolution par un plan parallèle à sa base est un disque.