SUJET 16 | Calculer une racine carrée

DURÉE 15 MIN

→ Fiche 10 Calculer avec des racines carrées
→ Fiche 44 Utiliser le théorème de Pythagore et sa réciproque

ABC est un triangle tel que : AB = 16 cm, AC = 14 cm et BC = 8 cm.

Les deux questions suivantes sont indépendantes l'une de l'autre.

1. Le triangle ABC est-il rectangle ? Justifier.

2. Le mathématicien Héron d'Alexandrie (Ier siècle) a trouvé une formule permettant de calculer l'aire d'un triangle. En notant a, b, c les longueurs des trois côtés et p son périmètre, l'aire A du triangle est donnée par la formule :

$$A=\sqrt{\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}-a\right)\left(\frac{p}{2}-b\right)\left(\frac{p}{2}-c\right)}.$$

À l'aide de cette formule, calculer l'aire du triangle ABC. Donner le résultat arrondi au cm² près.

DÉMARRONS ENSEMBLE

1. Aide-toi d'une figure à main levée. Utilise la réciproque du théorème de Pythagore. Calcule les carrés des trois côtés. → Fiche 44

2. Calcule d'abord p : c'est la somme des trois longueurs des côtés du triangle ABC.

CORRIGÉ

1. On calcule le carré des longueurs des trois côtés.

On a : $AB^2 = 256$, $AC^2 = 196$ et $BC^2 = 64$.

On a : $AC^2 + BC^2 = 196 + 64 = 260$. On en déduit que $AC^2 + BC^2 \neq AB^2$. Le triangle ABC n'est pas rectangle (contraposée du théorème de Pythagore).

2. On pose : $a = 16$, $b = 14$ et $c = 8$, les longueurs des trois côtés du triangle ABC. On a : $p = 16 + 14 + 8 = 38$. On applique la formule et on obtient :

$$A=\sqrt{\frac{38}{2}\left(\frac{38}{2}-16\right)\left(\frac{38}{2}-14\right)\left(\frac{38}{2}-8\right)}$$
$$=\sqrt{19(19-16)(19-14)(19-8)}$$
$$=\sqrt{19\times3\times5\times11}$$
$$=\sqrt{3135}.$$

MÉTHODE
Sous le symbole racine carrée, effectue d'abord les calculs entre parenthèses.

La valeur exacte de l'aire du triangle est égale à $\sqrt{3\,135}$ cm².

On a : $\sqrt{3\,135} \approx 55{,}99$.

Le résultat arrondi au cm² près est 56 cm².

SUJET 17 | Multiplier et diviser des racines carrées

DURÉE 15 MIN

→ Fiche 10 Calculer avec des racines carrées

On donne : $A=\sqrt{24{,}5}\times\sqrt{2}$; $B=\sqrt{\frac{5}{6}}\times\sqrt{30}$ et $C=\frac{\sqrt{80}}{\sqrt{27}}\times\sqrt{\frac{3}{5}}$.

Donner une écriture simplifiée des nombres A, B et C.

DÉMARRONS ENSEMBLE

- Pour chacun des calculs, utilise la propriété : pour tous nombres a et b positifs, on a $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{a\times b}$.
- Pense ensuite à simplifier les quotients.

CORRIGÉ

• On calcule A.

On a : $A=\sqrt{24{,}5}\times\sqrt{2}=\sqrt{24{,}5\times2}=\sqrt{49}$.

Donc $A=7$.

• On calcule B.

On a : $B=\sqrt{\frac{5}{6}}\times\sqrt{30}=\sqrt{\frac{5\times30}{6}}=\sqrt{5\times\frac{30}{6}}=\sqrt{5\times5}=\sqrt{25}$.

Donc $B=5$.

• On calcule C.

On a : $C=\frac{\sqrt{80}}{\sqrt{27}}\times\sqrt{\frac{3}{5}}=\sqrt{\frac{80}{27}}\times\sqrt{\frac{3}{5}}=\sqrt{\frac{80}{27}\times\frac{3}{5}}=\sqrt{\frac{80}{5}\times\frac{3}{27}}=\sqrt{16\times\frac{1}{9}}$.

Donc $C=\frac{4}{3}$.

MÉTHODE
Simplifie les quotients avant d'effectuer les multiplications. Les calculs seront plus faciles.

SUJET 18 | Additionner et soustraire des racines carrées

DURÉE 10 MIN

→ Fiche 11 Calculer une somme de racines carrées

On donne $C=5-3\sqrt{2}$ et $D=3+2\sqrt{2}$. Calculer $C+D$ et $C-D$. On donnera les résultats sous la forme $a+b\sqrt{c}$, c étant le plus petit possible.

DÉMARRONS ENSEMBLE

Dans le calcul de $C+D$ et de $C-D$, regroupe, d'une part, les termes contenant $\sqrt{2}$ et d'autre part, les autres nombres.

CORRIGÉ

On calcule $C+D$:

$$C+D=\left(5-3\sqrt{2}\right)+\left(3+2\sqrt{2}\right)=8-\sqrt{2}.$$

On calcule $C-D$:

$$C-D=\left(5-3\sqrt{2}\right)-\left(3+2\sqrt{2}\right)=5-3\sqrt{2}-3-2\sqrt{2}=2-5\sqrt{2}.$$

ATTENTION !
Quand on supprime des parenthèses précédées d'un signe –, on change les signes de tous les nombres situés dans les parenthèses.

SUJET 19 | Simplifier une somme de racines carrées

DURÉE 10 MIN

→ Fiche 11 Calculer une somme de racines carrées

On donne $G=5\sqrt{32}+\sqrt{18}-4\sqrt{2}$. Écrire G sous la forme $a\sqrt{2}$.

DÉMARRONS ENSEMBLE

Commence par diviser 32 et 18 par 2 et observe les quotients obtenus.

CORRIGÉ

On a : $G=5\sqrt{16\times2}+\sqrt{9\times2}-4\sqrt{2}=5\sqrt{16}\sqrt{2}+\sqrt{9}\sqrt{2}-4\sqrt{2}$

$=5\times4\sqrt{2}+3\sqrt{2}-4\sqrt{2}=20\sqrt{2}+3\sqrt{2}-4\sqrt{2}$

Donc $G=19\sqrt{2}$.

SUJET 20 | Écrire des nombres sous la forme $a\sqrt{b}$

DURÉE 20 MIN

→ Fiche 12 Conduire un calcul avec des racines carrées

On donne : $A=\sqrt{75}+4\sqrt{27}-5\sqrt{48}$; $B=4\sqrt{12}-5\sqrt{75}$; $C=2\sqrt{108}$ et $D=3\sqrt{2}\times\sqrt{6}$.

Montrer que les nombres A, B, C et D s'écrivent sous la forme $a\sqrt{3}$.

DÉMARRONS ENSEMBLE

Commence par écrire chaque nombre sous la forme $3\times n$. Par exemple : $75=3\times25$. Tu vois ainsi apparaître des carrés d'entiers.

CORRIGÉ

- On calcule A :

$A=\sqrt{75}+4\sqrt{27}-5\sqrt{48}=\sqrt{25\times3}+4\sqrt{9\times3}-5\sqrt{16\times3}$

$=\sqrt{25}\sqrt{3}+4\times\sqrt{9}\sqrt{3}-5\times\sqrt{16}\sqrt{3}=5\sqrt{3}+4\times3\sqrt{3}-5\times4\sqrt{3}$

$=(5+12-20)\sqrt{3}.$

Donc $A=-3\sqrt{3}$.

MÉTHODE
Pour simplifier une somme de $\sqrt{3}$, pense à factoriser cette somme par $\sqrt{3}$.

- On calcule B :

$B=4\sqrt{12}-5\sqrt{75}=4\sqrt{4\times3}-5\sqrt{25\times3}=4\times\sqrt{4}\sqrt{3}-5\times\sqrt{25}\sqrt{3}$

$=4\times2\sqrt{3}-5\times5\sqrt{3}=8\sqrt{3}-25\sqrt{3}.$

Donc $B=-17\sqrt{3}$.

- On calcule C :

$C=2\sqrt{108}=2\sqrt{36\times3}=2\sqrt{36}\sqrt{3}=2\times6\sqrt{3}.$

Donc $C=12\sqrt{3}$.

- On calcule D :

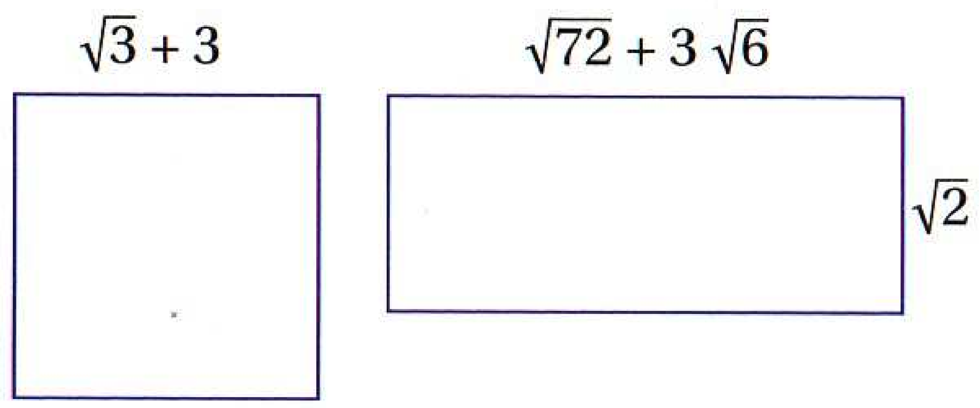
$D=3\sqrt{2}\times\sqrt{6}=3\sqrt{2\times6}=3\sqrt{12}=3\times\sqrt{4\times3}=3\times\sqrt{4}\sqrt{3}=3\times2\sqrt{3}.$

Donc $D=6\sqrt{3}$.

SUJET 21 | Développer à l'aide des identités remarquables

DURÉE 20 MIN

→ Fiche 10 Calculer avec des racines carrées
→ Fiche 12 Conduire un calcul avec des racines carrées



Dans cet exercice, toutes les longueurs sont données en centimètres.

La mesure du côté du carré est $\sqrt{3}+3$.

Les dimensions du rectangles sont $\sqrt{72}+3\sqrt{6}$ et $\sqrt{2}$.

Les figures ne sont pas on vraie grandeur.

1. Calculer l'aire A du carré. Réduire l'expression obtenue.

2. Calculer l'aire A' du rectangle.

3. Vérifier que les deux aires sont égales.

DÉMARRONS ENSEMBLE

1. N'oublie pas que $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

2. Multiplie les deux dimensions données.

3. Écris $\sqrt{12}$ sous la forme $a\sqrt{3}$.

CORRIGÉ

1. L'aire du carré est égale à $\left(\sqrt{3}+3\right)^2$. On développe cette expression. On obtient :

$$A=\left(\sqrt{3}+3\right)^2=\left(\sqrt{3}\right)^2+2\times3\times\sqrt{3}+3^2=3+6\sqrt{3}+9=12+6\sqrt{3}.$$

L'aire du carré est égale à $12+6\sqrt{3}$ cm^2.

2. L'aire du rectangle est égale à $\left(\sqrt{72}+3\sqrt{6}\right)\times\sqrt{2}$. On développe cette expression. On obtient :

$$A'=\left(\sqrt{72}+3\sqrt{6}\right)\times\sqrt{2}=\sqrt{72}\times\sqrt{2}+3\sqrt{6}\times\sqrt{2}=\sqrt{144}+3\sqrt{12}=12+3\sqrt{12}.$$

L'aire du rectangle est égale à $12+3\sqrt{12}$ cm^2.

ATTENTION ! 144 est le carré de 12, donc $\sqrt{144}=12$.

3. On a : $\sqrt{12}=\sqrt{4\times3}=\sqrt{4}\times\sqrt{3}=2\sqrt{3}$. On obtient alors :

$$A'=12+3\sqrt{12}=12+3\left(2\sqrt{3}\right)=12+6\sqrt{3}.$$

Les deux aires sont bien égales.

SUJET 22 | Comparer trois nombres

DURÉE 15 MIN

→ Fiche 6 Effectuer des opérations sur des nombres relatifs en écriture fractionnaire
→ Fiche 8 Conduire un calcul avec des puissances
→ Fiche 12 Conduire un calcul avec des racines carrées

On donne : $B=\dfrac{2-\dfrac{1}{3}}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}$; $C=-\dfrac{4\times10^{-3}\times(-5)\times10^{9}}{3\times10^{6}}$; $D=\dfrac{\left(3+\sqrt{11}\right)^2-6\sqrt{11}}{3}$.

Montrer, en détaillant les calculs, que $B=C=D$.

DÉMARRONS ENSEMBLE

- Pour les calculs B et C, revois les fiches 6 et 8.
- Pour le calcul D, utilise l'identité remarquable $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

CORRIGÉ

On a :

$$B=\dfrac{\dfrac{6}{3}-\dfrac{1}{3}}{\dfrac{1}{4}}=\dfrac{5}{3}\times\dfrac{4}{1}=\dfrac{20}{3}$$

$$C=-\dfrac{(-20)\times\cancel{10^6}}{3\times\cancel{10^6}}=\dfrac{20}{3}$$

$$D=\dfrac{3^2+2\times3\times\sqrt{11}+\left(\sqrt{11}\right)^2-6\sqrt{11}}{3}=\dfrac{9+6\sqrt{11}+11-6\sqrt{11}}{3}=\dfrac{20}{3}.$$

Les nombres B, C et D sont donc égaux.

SUJET 23 | Utiliser une calculatrice

DURÉE 10 MIN

→ Fiche 12 Conduire un calcul avec des racines carrées

Les deux questions sont indépendantes l'une de l'autre.

On donne : $C=\sqrt{\dfrac{442{,}5-7^2\times 2{,}5}{5}}$; $D=\sqrt{6}-\sqrt{5}$; $E=\dfrac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{5}}$.

1. Calculer C.

2. Comparer D et E à l'aide de la calculatrice.

MÉTHODE
Pour calculer une racine carrée sur une calculatrice, on tape les touches $\boxed{2^{nd}}$ $\boxed{x^2}$ ou directement la touche $\boxed{\sqrt{\ }}$ si elle existe.

DÉMARRONS ENSEMBLE

1. Commence par calculer l'expression sous le symbole racine carrée. Respecte les règles de priorités de calculs.
2. Pour le calcul D, utilise la touche $\sqrt{\ }$ de la calculatrice. Pour l'expression E, divise 1 par la somme $\sqrt{6}+\sqrt{5}$. N'oublie pas les parenthèses indispensables.

CORRIGÉ

1. On a : $C=\sqrt{\dfrac{442{,}5-49\times 2{,}5}{5}}=\sqrt{\dfrac{442{,}5-122{,}5}{5}}=\sqrt{\dfrac{320}{5}}=\sqrt{64}$.

Donc $C=8$.

2. Pour calculer D, on tape les touches suivantes sur la calculatrice :

$\boxed{2^{nd}}\,\boxed{x^2}\,\boxed{6}\,\boxed{-}\,\boxed{2^{nd}}\,\boxed{x^2}\,\boxed{5}$. On obtient :

$D\simeq 0{,}213\,421$.

Pour calculer E, on tape les touches suivantes sur la calculatrice :

$\boxed{1}\,\boxed{/}\,\boxed{(}\,\boxed{2^{nd}}\,\boxed{x^2}\,\boxed{6}\,\boxed{+}\,\boxed{2^{nd}}\,\boxed{x^2}\,\boxed{5}\,\boxed{)}$. On obtient :

$E\simeq 0{,}213\,421$.

À la calculatrice, on obtient que les nombres D et E semblent égaux.

ATTENTION !
Pour démontrer que les nombres D et E sont égaux, il faut effectuer un calcul. La calculatrice ne donne qu'une idée du résultat à démontrer.