

SUJET 76 | Reconnaître un quadrilatère particulier
DURÉE
20 MIN

→ **Fiche 44** Utiliser le théorème de Pythagore et sa réciproque

→ **Fiche 47** Démontrer qu'un quadrilatère est particulier

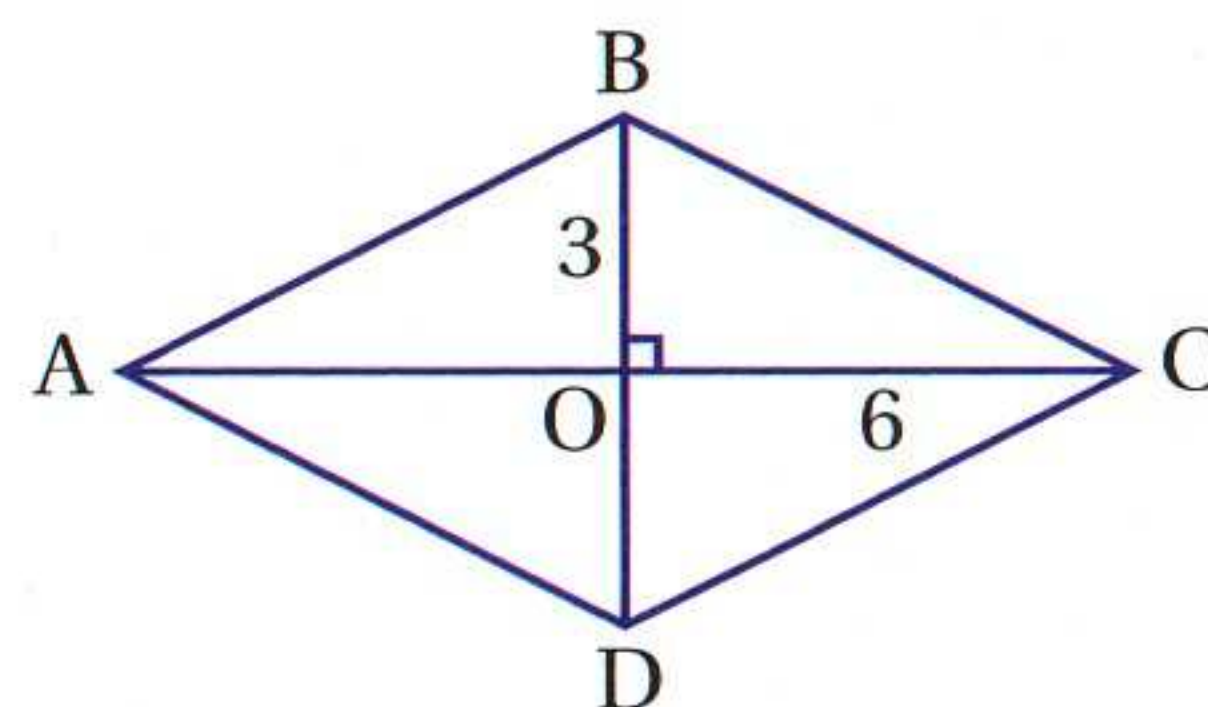
1. Tracer un triangle OBC rectangle en O tel que $OB = 3$ et $OC = 6$.
2. Calculer la valeur exacte de la longueur BC.
3. Construire le point D symétrique de B par rapport à O, puis le point A tel que le quadrilatère ABCD soit un parallélogramme.
4. Montrer que O est le milieu de [AC].
5. Démontrer que ABCD est un losange.

DÉMARRONS ENSEMBLE

2. Applique le théorème de Pythagore au triangle OBC rectangle en O.
3. Vérifie que [AC] est une diagonale du parallélogramme ABCD.
4. Cherche une propriété possédée par les diagonales du parallélogramme ABCD.
5. Tu sais que ABCD est un parallélogramme. Observe ses diagonales.

CORRIGÉ

1. et 3. Voici la figure complète. Elle n'est pas en vraie grandeur.



2. On applique le théorème de Pythagore au triangle OBC rectangle en O. On a :

$$BC^2 = OC^2 + BO^2 = 6^2 + 3^2 = 45.$$

Or $BC > 0$, donc $BC = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$.

4. Le point D est le symétrique de B par rapport à O, donc O est le milieu de [BD]. Or ABCD est un parallélogramme. Ses diagonales [BD] et [AC] ont le même milieu O. Donc O est le milieu de [AC].

5. ABCD est un parallélogramme. De plus, le triangle OBC est rectangle en O, donc les diagonales du parallélogramme ABCD sont perpendiculaires. ABCD est donc un losange.

MÉTHODE

Tu sais que ABCD est un parallélogramme. Tu sais que ses diagonales ont le même milieu. Tu cherches une autre propriété qui en fera un losange.

SUJET 77 | Appliquer le théorème de Thalès
DURÉE
20 MIN

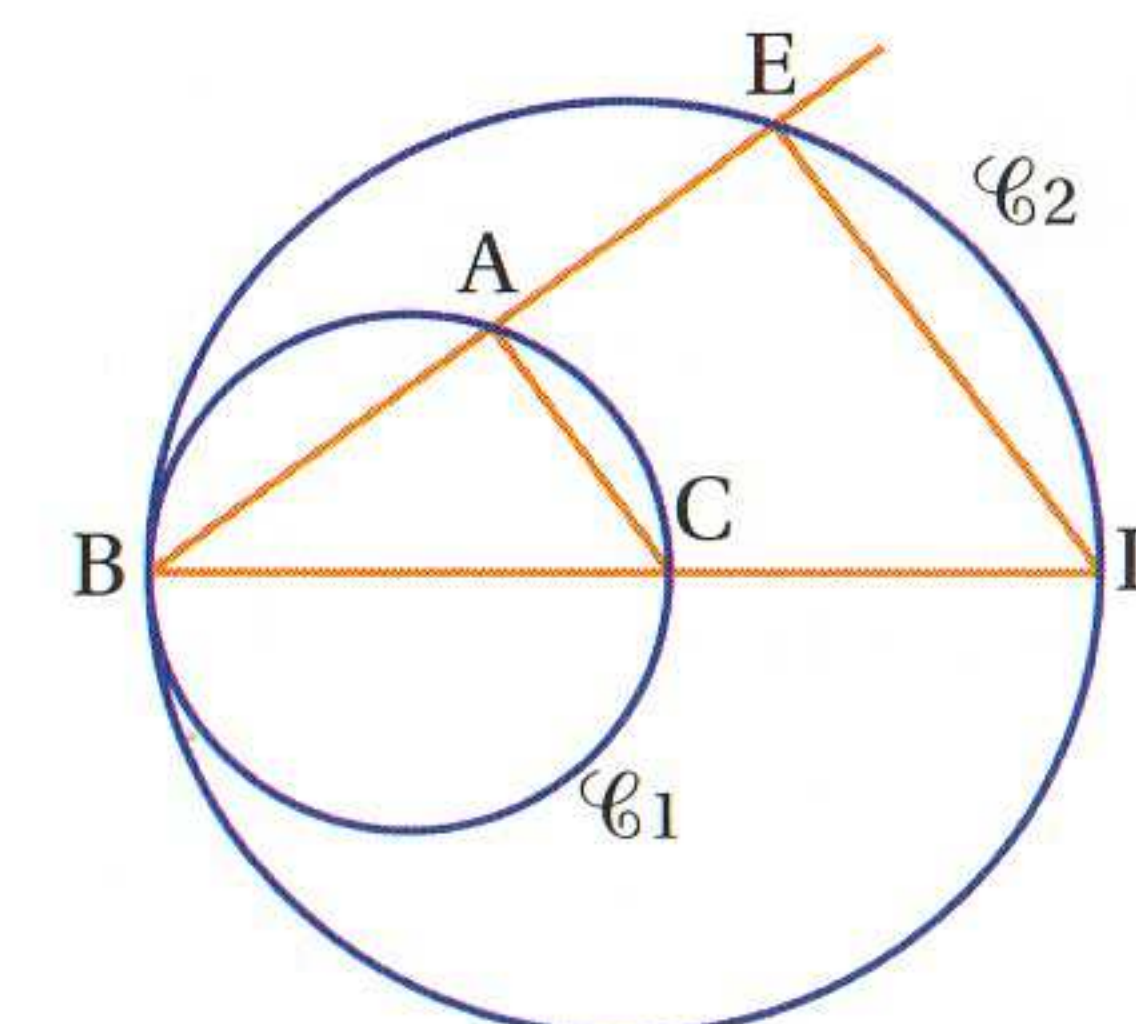
→ **Fiche 43** Utiliser la propriété du cercle circonscrit au triangle rectangle

→ **Fiche 48** Calculer une longueur à l'aide du théorème de Thalès

L'unité est le centimètre. On considère le cercle $\mathcal{C}_1$ de diamètre [BC] et le cercle $\mathcal{C}_2$ de diamètre [BD].

A est un point de $\mathcal{C}_1$ et la droite (AB) coupe le cercle $\mathcal{C}_2$, au point E.

On donne : $BA = 4$; $BC = 5$ et $BD = 9$. La figure ci-dessous n'est pas en vraie grandeur.



1. Les triangles ABC et EBD sont rectangles.

Parmi les trois propriétés suivantes, recopier la propriété qui permet de démontrer ce résultat, dans cet exercice :

- Si le carré de la longueur d'un côté d'un triangle est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés, alors ce triangle est rectangle.
- Les bissectrices d'un triangle sont concourantes en un point qui est le centre du cercle inscrit dans ce triangle.
- Si un triangle est inscrit dans un cercle et que l'un de ses côtés est un diamètre de ce cercle, alors ce triangle est rectangle.

2. Dans le triangle ABC rectangle en A, calculer AC.

3. En s'aidant du résultat de la question 2, montrer que les droites (AC) et (ED) sont parallèles.

4. Montrer que $BE = 7,2$.

DÉMARRONS ENSEMBLE

1. Observe que [BC] est un diamètre du cercle $\mathcal{C}_1$.
2. Utilise le théorème de Pythagore dans le triangle ABC.
3. Observe les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BED}$.
4. Applique le théorème de Thalès aux droites sécantes [BE] et [BD]. Trouve deux droites parallèles.

CORRIGÉ

1. On considère le cercle $\mathcal{C}_1$ de diamètre $[BC]$ et le cercle $\mathcal{C}_2$ de diamètre $[BD]$. A est un point de $\mathcal{C}_1$ et E est un point de $\mathcal{C}_2$. On utilise la propriété : si un triangle est inscrit dans un cercle et que l'un de ses côtés est un diamètre de ce cercle, alors ce triangle est rectangle.

2. On utilise le théorème de Pythagore dans le triangle ABC. On a : $BC^2 = AB^2 + AC^2$. Soit : $5^2 = 4^2 + AC^2$. D'où : $AC^2 = 25 - 16 = 9$. Or $AC > 0$, donc $AC = 3$.

3. Les triangles ABC et EBD sont rectangles respectivement en A et en E. On a alors (AC) perpendiculaire à (AB) et (DE) perpendiculaire à (AB). On en déduit que les droites (AC) et (ED) sont parallèles.

4. On applique le théorème de Thalès en observant que les droites (BE) et (BD) se coupent en B. Les points A et E appartiennent à (BE) et les points C et D appartiennent à (BD). De plus, les droites (AC) et (DE) sont parallèles. On obtient :

$$\frac{BA}{BE} = \frac{BC}{BD} = \frac{AC}{ED}.$$

On remplace les longueurs connues : $\frac{4}{BE} = \frac{5}{9} = \frac{3}{ED}$. D'où : $BE = (4 \times 9) \div 5 = 7,2$.

MÉTHODE

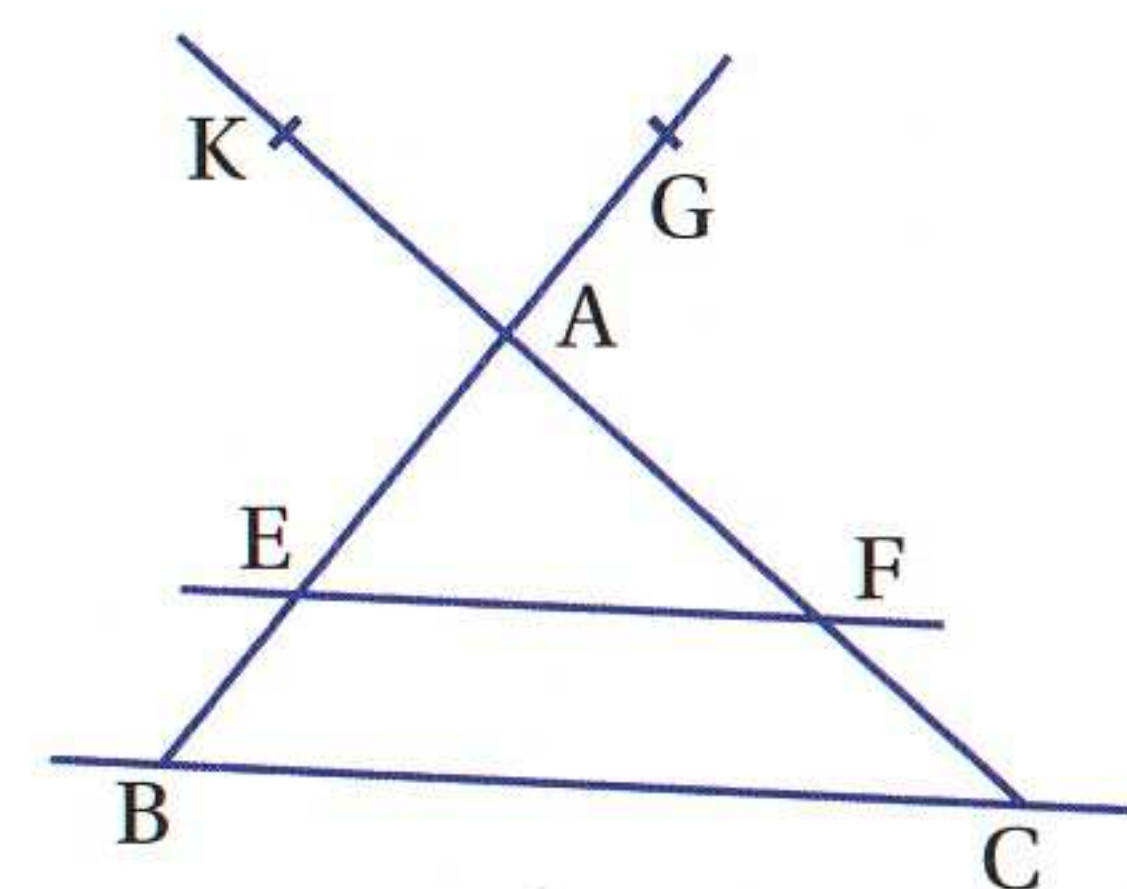
Pense à la propriété : si deux droites sont perpendiculaires à une même droite, elles sont parallèles.

SUJET 78 | Appliquer la réciproque du théorème de Thalès

DURÉE
15 MIN

→ Fiche 44 Utiliser le théorème de Pythagore et sa réciproque

→ Fiche 49 Démontrer que des droites sont parallèles



Sur la figure ci-contre (elle n'est pas en vraie grandeur) :

- les points K, A, F, C sont alignés ;
- les points G, A, E, B sont alignés ;
- (EF) et (BC) sont parallèles ;
- $AB = 5$ et $AC = 6,5$;
- $AE = 3$ et $EF = 4,8$;
- $AK = 2,6$ et $AG = 2$.

1. Démontrer que $BC = 8$.
2. Les droites (KG) et (BC) sont-elles parallèles ? Justifier.
3. Les droites (AC) et (AB) sont-elles perpendiculaires ? Justifier.

DÉMARRONS ENSEMBLE

1. Applique le théorème de Thalès aux droites (AB) et (AC) en considérant les parallèles (EF) et (BC).
2. Cette fois-ci, c'est la réciproque du théorème de Thalès qu'il faut utiliser.
3. Cherche si le triangle ABC est rectangle en A. Tu connais la longueur de ses trois côtés.

CORRIGÉ

1. On applique le théorème de Thalès en observant que les droites (AB) et (AC) se coupent en A. Les points B et E appartiennent à (AE) et les points F et C appartiennent à (AC). En outre, (EF) et (BC) sont parallèles. On obtient :

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC}.$$

On remplace les longueurs connues : $\frac{3}{5} = \frac{AF}{6,5} = \frac{4,8}{BC}$. À l'aide du produit en croix, on a : $BC = (4,8 \times 5) \div 3 = 8$.

2. On applique la réciproque du théorème de Thalès aux droites (BG) et (CK) sécantes en A.

On a : $\frac{AG}{AB} = \frac{2}{5} = 0,4$ et $\frac{AK}{AC} = \frac{2,6}{6,5} = 0,4$. On a donc : $\frac{AG}{AB} = \frac{AK}{AC}$.

En outre, les points G, A, B d'une part, et les points K, A, C d'autre part sont alignés dans cet ordre. D'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (KG) et (BC) sont parallèles.

3. On calcule les carrés des longueurs des trois côtés : $AB^2 = 25$, $AC^2 = 42,25$ et $BC^2 = 64$. On observe que $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$. D'après la contraposée du théorème de Pythagore, le triangle ABC n'est pas rectangle. Les droites (AC) et (AB) ne sont pas perpendiculaires.

ATTENTION !

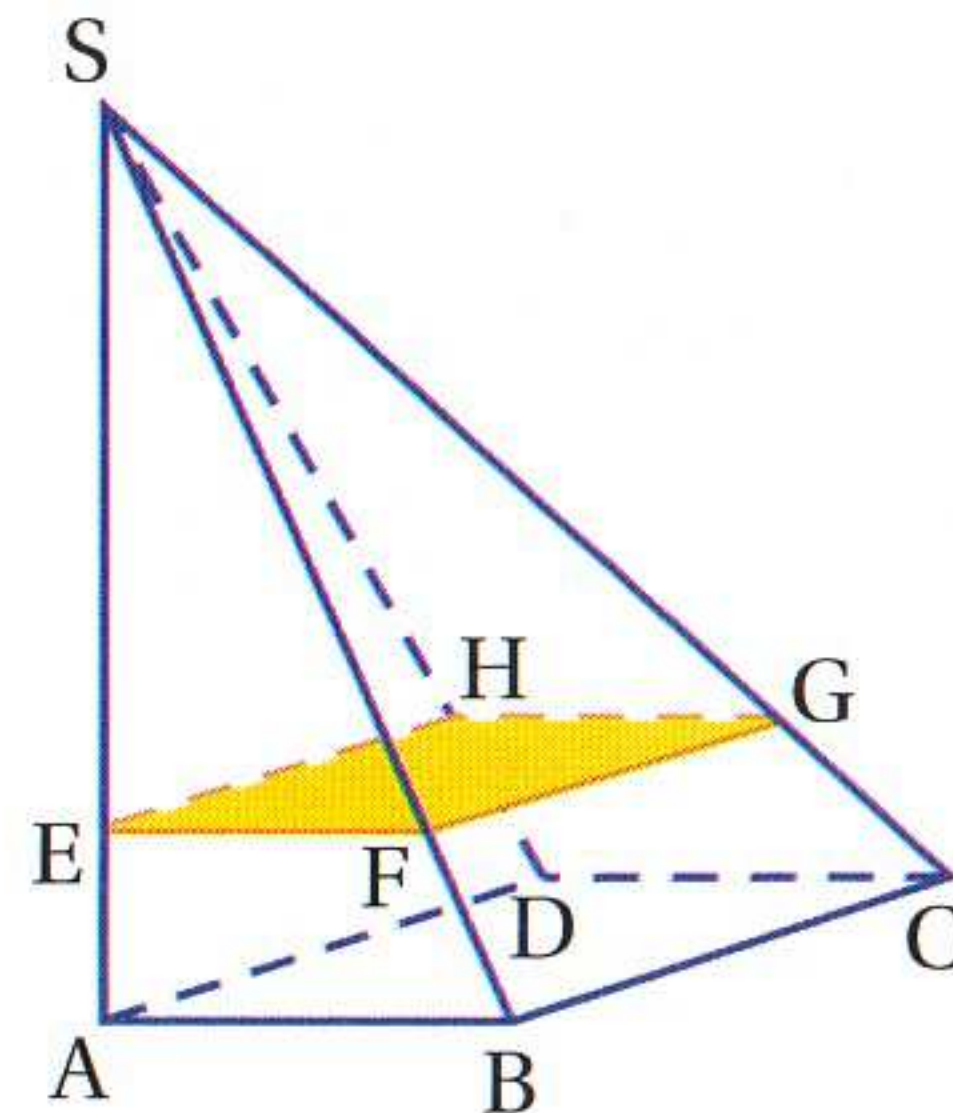
Pour calculer une longueur, on emploie le théorème de Thalès et pour montrer le parallélisme de deux droites, on emploie sa réciproque.

SUJET 79 | Appliquer la réciproque du théorème de Thalès dans l'espace

DURÉE
10 MIN→ **Fiche 44** Utiliser le théorème de Pythagore et sa réciproque→ **Fiche 50** Utiliser le théorème de Thalès et sa réciproque dans l'espace

SABCD est une pyramide à base rectangulaire ABCD, de hauteur [SA].

On donne $SA = 15$ cm, $AB = 8$ cm et $BC = 11$ cm. La figure n'est pas en vraie grandeur.



1. Démontrer que $SB = 17$ cm.

2. On note E le point de [SA] tel que $SE = 12$ cm et F le point de [SB] tel que $SF = 13,6$ cm. Montrer que les droites (EF) et (AB) sont parallèles.

DÉMARRONS ENSEMBLE

1. Explique d'abord pourquoi le triangle ABS est rectangle en A.
2. Applique la réciproque du théorème de Thalès aux droites (SA) et (SB) sécantes en S.

CORRIGÉ

1. SABCD est une pyramide à base rectangulaire ABCD, de hauteur [SA]. Donc le triangle ABS est rectangle en A. On applique le théorème de Pythagore à ce triangle. On a : $SB^2 = SA^2 + AB^2 = 15^2 + 8^2 = 289$.

Or $SB > 0$, donc $SB = \sqrt{289} = 17$.

2. On applique la réciproque de Thalès aux droites (SA) et (SB) sécantes en S.

On a : $\frac{SE}{SA} = \frac{12}{15} = 0,8$ et $\frac{SF}{SB} = \frac{13,6}{17} = 0,8$. On a donc : $\frac{SE}{SA} = \frac{SF}{SB}$.

En outre, les points S, E, A d'une part, et les points S, F, B d'autre part sont alignés dans cet ordre. D'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (EF) et (AB) sont parallèles.

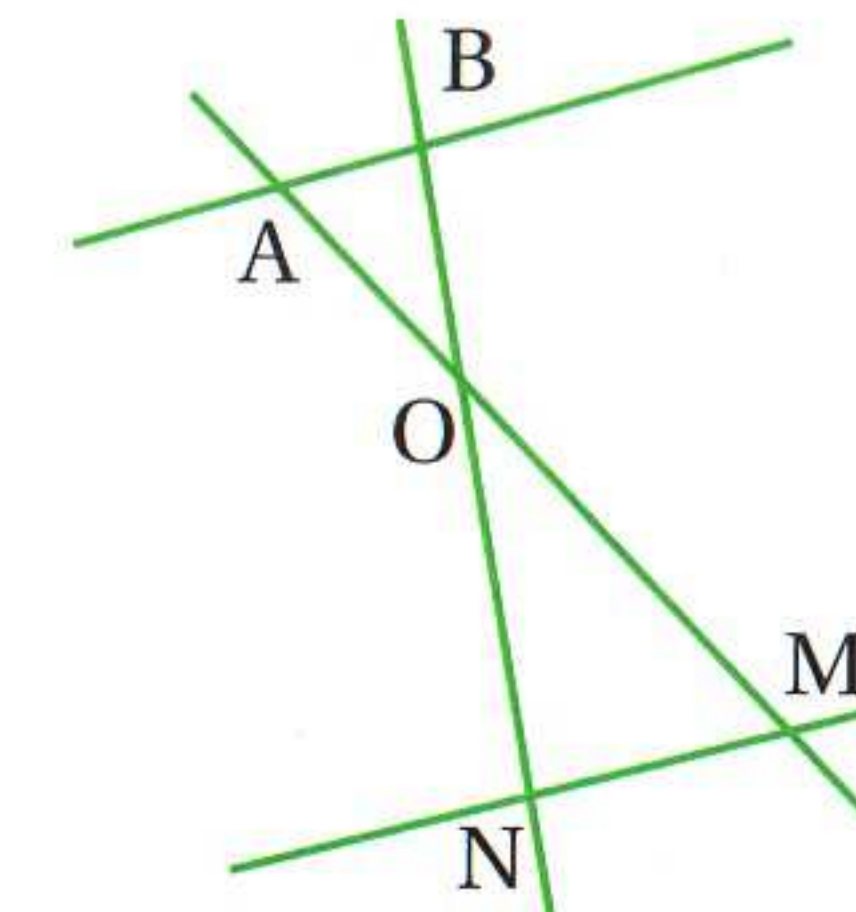
ATTENTION !

Pour appliquer la réciproque du théorème de Thalès dans l'espace, il faut trouver deux droites sécantes.

SUJET 80 | Théorème de Thalès et calcul d'aire

DURÉE
15 MIN→ **Fiche 48** Calculer une longueur à l'aide du théorème de Thalès→ **Fiche 49** Démontrer que des droites sont parallèles→ **Fiche 55** Calculer un coefficient de réduction ou d'agrandissement

La figure ci-dessous n'est pas en vraie grandeur ; on ne demande pas de la reproduire.



Les droites (AM) et (BN) sont sécantes en O. Les dimensions sont en centimètres.

On donne : $OA = 3$; $OB = 2,5$; $OM = 5,4$; $ON = 4,5$.

1. Montrer que les droites (AB) et (MN) sont parallèles.
2. On suppose que $AB = 1,2$. Calculer la distance MN.
3. Choisir parmi les quatre nombres ci-après, celui qui est égal à $\frac{\text{aire du triangle OMN}}{\text{aire du triangle OAB}}$:

a. 0,6 ; b. 1,8 ; c. 3,24 ; d. 3,6.

DÉMARRONS ENSEMBLE

1. Applique la réciproque du théorème de Thalès.
2. Tu as démontré à la question précédente que les droites (AB) et (MN) sont parallèles. Trouve le troisième rapport.
3. Cherche le coefficient d'agrandissement qui permet de passer du triangle OAB au triangle OMN. → **Fiche 55**

CORRIGÉ

1. On applique la réciproque du théorème de Thalès aux droites (AM) et (BN) sécantes en O.

$$\text{On a : } \frac{OA}{OM} = \frac{3}{5,4} = \frac{30}{54} = \frac{5}{9} \text{ et } \frac{OB}{ON} = \frac{2,5}{4,5} = \frac{5}{9}. \text{ On a donc : } \frac{OA}{OM} = \frac{OB}{ON}.$$

De plus, les points A, O, M d'une part, et les points B, O, N d'autre part sont alignés dans cet ordre. D'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (AB) et (MN) sont parallèles.

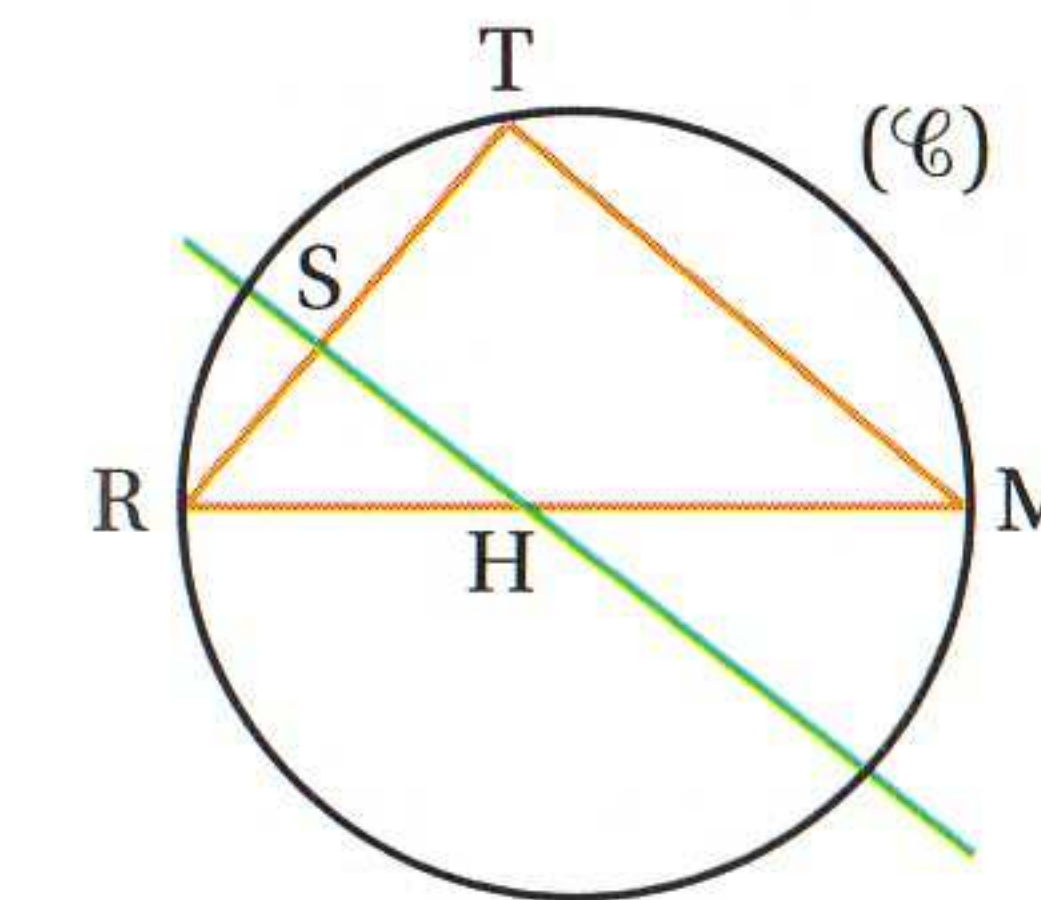
2. Les droites (AB) et (MN) sont parallèles, donc $\frac{OA}{OM} = \frac{OB}{ON} = \frac{AB}{MN}$. On en

déduit que : $\frac{5}{9} = \frac{1,2}{MN}$. D'où : $5 \times MN = 9 \times 1,2$, soit $MN = 2,16$ cm.

3. Le triangle OMN est un agrandissement du triangle AOB. On sait que $\frac{OM}{OA} = \frac{9}{5}$. Le coefficient est $\frac{9}{5}$, soit 1,8. On a alors :

$$\frac{\text{aire du triangle OMN}}{\text{aire du triangle OAB}} = 1,8^2 = 3,24 \text{ (réponse c).}$$

SUJET 81 | Théorème de Thalès et fonctions

DURÉE
25 MIN→ **Fiche 30** Représenter une fonction affine→ **Fiche 43** Utiliser la propriété du cercle circonscrit au triangle rectangle→ **Fiche 44** Utiliser le théorème de Pythagore et sa réciproque→ **Fiche 48** Calculer une longueur à l'aide du théorème de Thalès

La figure n'est pas en vraie grandeur.

1. Soit $(\mathcal{C})$ un cercle de diamètre $[RM]$ avec $RM = 10$.

Soit T un point de $(\mathcal{C})$ tel que $RT = 6$.

a. Démontrer que RMT est un triangle rectangle.

b. Démontrer que $TM = 8$.

2. Soit S un point de $[RT]$ et H le point de $[RM]$ tel que $(SH) \parallel (TM)$. On pose $RS = x$.

a. Donner un encadrement de x .

b. Démontrer que $RH = \frac{5x}{3}$ et $SH = \frac{4x}{3}$.

c. Exprimer, en fonction de x , le périmètre $f(x)$ du triangle RSH.

d. Démontrer que le périmètre $g(x)$ du trapèze STMH est égal à : $24 - \frac{4}{3}x$.

3. On considère les fonctions affines f et g telles que :

$$f : x \mapsto 4x \text{ et } g : x \mapsto 24 - \frac{4}{3}x.$$

a. Calculer $f(0)$, $f(6)$, $g(0)$ et $g(6)$.

b. Sur une feuille de papier millimétré, représenter graphiquement f et g dans un repère orthonormé :

- origine du repère en bas à gauche de la feuille de papier millimétré ;
- unité le centimètre.

c. Déterminer par le calcul la valeur de x pour laquelle $f(x) = g(x)$.

d. Retrouver sur le graphique la valeur de x trouvée à la question précédente. Faire apparaître les pointillés nécessaires.

e. Que représente la solution de l'équation $f(x) = g(x)$ pour le triangle RSH et le trapèze STMH ?

DÉMARRONS ENSEMBLE

1. a. Observe que [RM] est un diamètre du cercle ($\mathcal{C}$).
- b. Applique le théorème de Pythagore.
2. a. Applique le théorème de Thalès aux droites (RT) et (RM) se coupant en R.
- b. et c. Le périmètre d'un polygone est égal à la somme des longueurs de ses côtés.
3. b. Utilise les calculs faits à la question précédente pour trouver des points appartenant aux représentations graphiques des fonctions f et g . → Fiche 30

CORRIGÉ

1. a. [RM] est un diamètre du cercle ($\mathcal{C}$) et T est un point du cercle, donc le triangle RMT est rectangle en T.

b. On applique le théorème de Pythagore au triangle RMT rectangle en T. On a : $RM^2 = RT^2 + TM^2$.
Soit : $10^2 = 6^2 + TM^2$.
D'où : $TM^2 = 100 - 36 = 64$.
Or TM est une longueur, donc $TM = 8$.

2. a. S appartient au segment [RT] et $RT = 6$, donc x est compris entre 0 et 6.

b. On applique le théorème de Thalès en observant que les droites (RT) et (RM) se coupent en R. Les points S et T appartiennent à (RT) et les points H et M appartiennent à (RM). En outre, (SH) et (TM) sont parallèles. On obtient : $\frac{RS}{RT} = \frac{RH}{RM} = \frac{SH}{MT}$.

On remplace les longueurs connues : $\frac{x}{6} = \frac{RH}{10} = \frac{SH}{8}$. À l'aide du produit en croix, on a : $RH = \frac{10x}{6} = \frac{5x}{3}$ et $SH = \frac{8x}{6} = \frac{4x}{3}$.

c. On calcule :

$$RS + SH + RH = x + \frac{4x}{3} + \frac{5x}{3} = \frac{3x + 4x + 5x}{3} = \frac{12x}{3} = 4x.$$

Le périmètre du triangle RSH est $4x$. Donc $f(x) = 4x$.

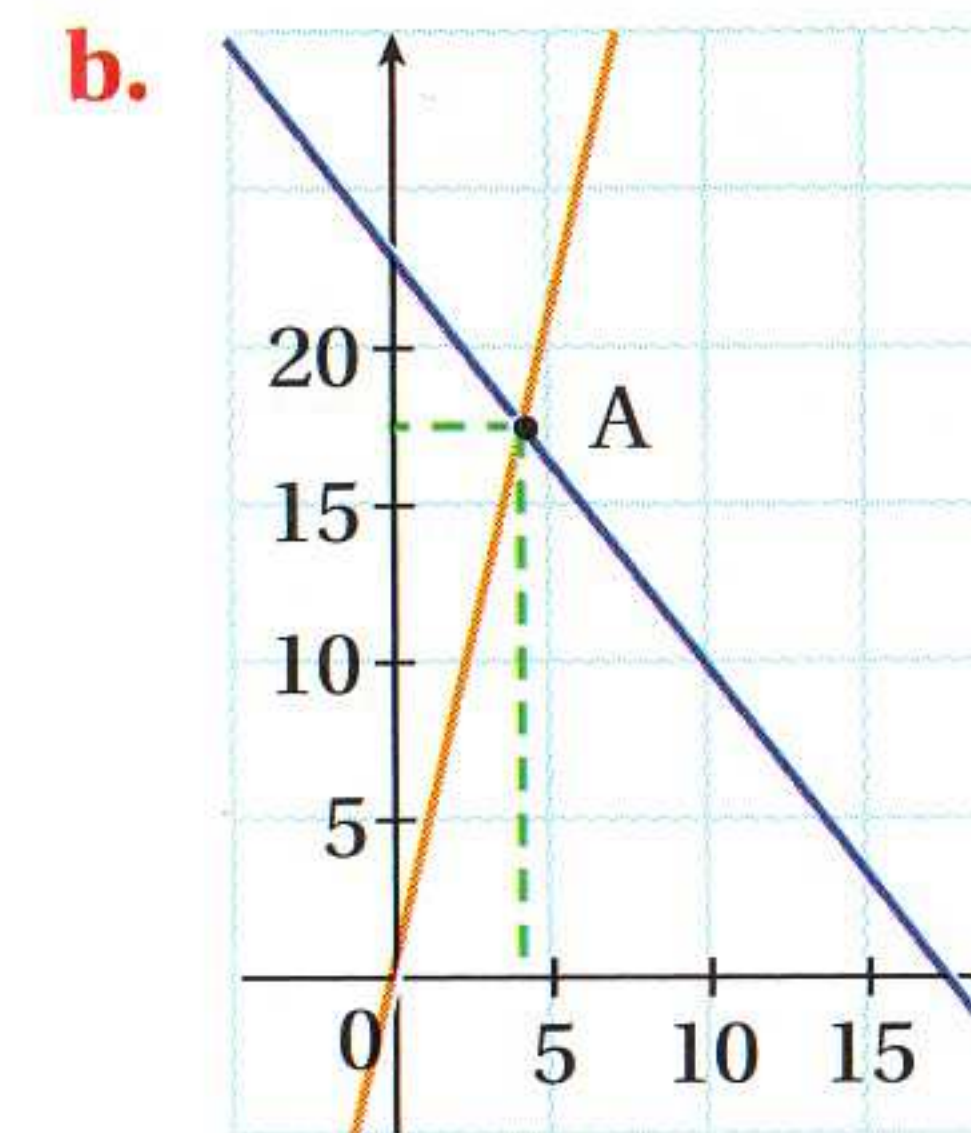
$$\begin{aligned} \text{d. On a : } SH + HM + MT + TS &= \frac{4x}{3} + (RM - RH) + 8 + (RT - RS) \\ &= \frac{4x}{3} + (10 - \frac{5x}{3}) + 8 + (6 - x) = 24 - \frac{4}{3}x. \end{aligned}$$

Le périmètre du trapèze STMH est $24 - \frac{4}{3}x$. Donc $g(x) = 24 - \frac{4}{3}x$.

ATTENTION !

Le dénominateur commun est 3. On a : $x = \frac{x}{1} = \frac{3x}{3}$.

3. a. On a $f(0) = 0$, $f(6) = 24$, $g(0) = 24$ et $g(6) = 16$.



c. On résout l'équation $f(x) = g(x)$, soit $4x = 24 - \frac{4}{3}x$. D'où $12x = 72 - 4x$, ou $16x = 72$. Donc $x = 4,5$.

d. Voir la figure.

e. Pour $x = 4,5$, les périmètres du triangle RSH et du trapèze STMH sont égaux.

MÉTHODE

La représentation graphique de la fonction f est la droite passant par les points de coordonnées $(0 ; 0)$ et $(6 ; 24)$.

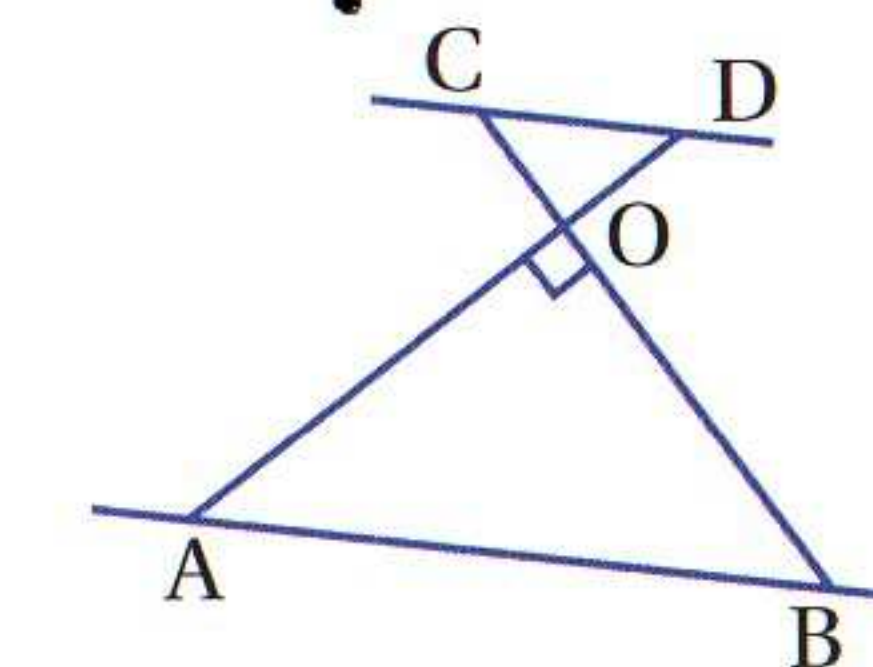
SUJET 82 | Théorème de Thalès et trigonométrie

DURÉE
15 MIN

→ Fiche 45 Calculer une longueur en utilisant la trigonométrie

→ Fiche 49 Démontrer que des droites sont parallèles

Sur la figure ci-dessous les mesures ne sont pas respectées. On a $OA = 3\sqrt{3}$ cm, $OD = \sqrt{3}$ cm, $CO = 3$ cm. $\widehat{AOB}$ est un angle droit et $\widehat{OAB} = 60^\circ$. Montrer que les droites (CD) et (AB) sont parallèles.



Si le travail n'est pas terminé, laisser tout de même une trace de la recherche. Elle sera prise en compte dans la notation.

DÉMARRONS ENSEMBLE

Attention ! Ici, tu n'es pas guidé : tu dois trouver par toi-même les **étapes de la solution**.

- Calcule d'abord la longueur OB dans le triangle rectangle AOB en utilisant un rapport de trigonométrie.
- Puis applique la réciproque du théorème de Thalès.

CORRIGÉ

On calcule d'abord la longueur OB. Le triangle AOB est rectangle en O, donc :

$$\tan \widehat{OAB} = \frac{OB}{OA} ; \tan 60^\circ = \frac{OB}{3\sqrt{3}} ; OB = 3\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 9 \text{ cm.}$$

On calcule ensuite les rapports : $\frac{CO}{OB} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} ; \frac{OD}{OA} = \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{3}.$

On a donc : $\frac{CO}{OB} = \frac{OD}{OA}.$

De plus, les points C, O, B d'une part, et les points D, O, A d'autre part sont alignés dans cet ordre. D'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (CD) et (AB) sont parallèles.

MÉTHODE

En présence d'un triangle rectangle, pense au théorème de Pythagore ou à la trigonométrie.